

NOTIONS D'ÉLECTROMAGNÉTISME

Première année de Licence SPC



LEDIG Jordan

Sommaire

I	Rappels de cours	1
1	Intégrales en coordonnées cylindriques	1
2	Intégrales en coordonnées sphériques	2
3	Calcul de flux et de circulation	4
3.1	Calcul de flux	4
	Définition.	4
	Théorème de Gauss.	4
3.2	Calcul de circulation	5
	Définition.	5
	Théorème de Stockes.	5
	Cas des champs conservatifs.	6
4	Lois fondamentales de l'électromagnétisme classique	6
4.1	Lois de Coulomb et de Lorenz	6
	Loi de Lorenz généralisée.	7
4.2	Relation entre potentiel et champs électromagnétiques	7
5	Équations de Maxwell et calculs de champs	7
	MAXWELL–GAUSS.	7
	MAXWELL–FARADAY.	7
	MAXWELL–THOMSON.	7
	MAXWELL–AMPÈRE.	7
5.1	Lois de Biot et Savart et de Coulomb dans le cas continu	8
5.2	La lumière et les ondes électromagnétiques	8
5.3	Conservation de la charge	9
5.4	Symétries de champs	10
5.5	Théorème de Gauss et théorème d'Ampère	11
	5.5.1 Théorème de Gauss	11
	5.5.2 Théorème d'Ampère	12
6	Compléments	13
6.1	Éléments de volumes, de surface, et de longueurs	13
	6.1.1 Cas scalaire	13
	6.1.2 Cas vectoriel	13
6.2	Divergence, rotationnel et Laplacien en coordonnées locales	14
	6.2.1 Position du problème	14
	6.2.2 Démonstration pour la divergence en coordonnées cylindriques	15
	6.2.3 Tables	16
6.3	Équations de Poisson	17
	6.3.1 Cas stationnaire	17
	6.3.2 Cas permanent	17
	6.3.3 Dans le vide	17
6.4	Conservation de l'énergie électromagnétique – Théorème de Poynting	18
II	Exercices	19
1	Calculs d'intégrales	19
	Exercice 1 : Intégrations par parties.	19
	Exercice 2 : Intégrale Gaussienne.	19
	Exercice 3 : Changement de variable.	19
	Exercice 4 : Densités linéiques.	19
	Exercice 5 : Densités surfaciques.	20
	Exercice 6 : Densités volumiques.	20

2 Electro-dynamique	20
Exercice 1 : Deux charges accélérées.	20
Exercice 2 : Électron dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.	20
Exercice 3 : Électron dans un champ électrique uniforme et stationnaire.	20
Exercice 4 : Modèle quantique de l'atome de Bohr.	21
3 Électrostatique	21
Exercice 0 : Étude d'un cas standard.	21
Exercice 1 : L'atome d'hydrogène de Bohr.	25
Exercice 2 : Modèle sommaire de l'atome d'hydrogène.	25
Exercice 3 : Atome d'hydrogène <i>presque</i> réel.	25
Exercice 4 : Le disque chargé.	26
Exercice 5 : Le plan infini chargé.	26
Exercice 6 : Le cerceau chargé.	26
Exercice 7 : Le cylindre chargé en volume.	26
Exercice 8 : Le cylindre chargé en surface.	26
Exercice 9 : Le fil infini.	26
Exercice 10 : La sphère chargée en surface.	26
Exercice 11 : Équations de Maxwell en gravitation.	26
4 Magnétostatique	26
Exercice 0 : Champ magnétique créé par une bobine.	26
Exercice 0(bis) : Le fil infini.	28
Exercice 1 : La spire.	29
Exercice 2 : Le fil infini.	29

Table des figures

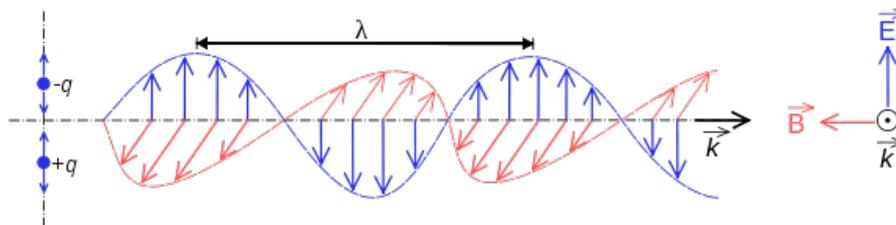
1	Représentation spatiale des coordonnées cylindriques	1
2	Représentation spatiale des coordonnées sphériques	3
3	Symétries du champ électrique pour le plan infini chargé.	10
4	Symétries du champ magnétique pour le fil infini.	11
5	Champs générés par un cerceau électrique.	22
6	Sphère chargée en volume.	23
7	Champs générés par une sphère chargée en volume.	25

Liste des tableaux

1	Éléments de volumes, de surfaces et de longueurs.	14
2	Divergence dans les différents systèmes de coordonnées	16
3	Rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées	16
4	Laplacien dans les différents systèmes de coordonnées	16
5	Formulaire d'électromagnétisme	31

Première partie

Rappels de cours



1 Intégrales en coordonnées cylindriques

En électromagnétisme, on a souvent besoin de faire appel aux coordonnées polaires et sphériques pour les calculs d'intégrales. En effet, il ne serait pas aisé d'utiliser les coordonnées cartésiennes. Si l'on désire, par exemple, calculer l'aire d'un disque D de rayon R , en coordonnées cartésiennes on obtiendrait la formule suivante :

$$A = \iint_D dx dy = \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx$$

Cette intégrale n'est pas facilement calculable... Il faut donc utiliser autre chose : il est préférable ici de passer en coordonnées polaires (ou coordonnées cylindriques). On ne pose alors simplement qu'un changement de variable $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Ce qui revient à dire que

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Ainsi, un point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) (en notation cartésienne) aura pour coordonnées (r, θ, z) (en coordonnées cylindriques). Cela veut également dire que le vecteur position de M a pour composante : $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$. Voici un petit schéma qui récapitule ce système de coordonnées :

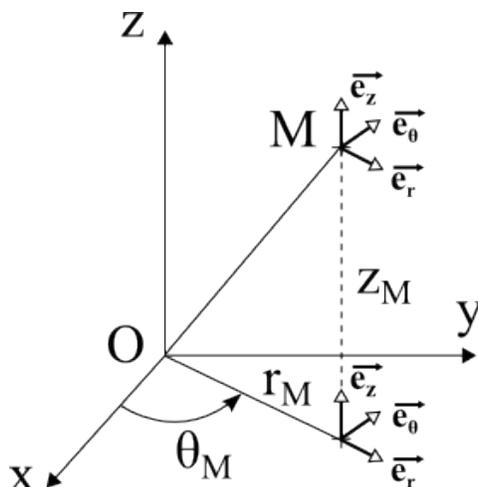


FIGURE 1 – Représentation spatiale des coordonnées cylindriques

Maintenant que nous savons comment passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques, nous pouvons aisément calculer la valeur de l'aire d'un disque D de rayon R . On réutilise la formule définie plus haut, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A} = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$$

On prend alors $x = R \cos \theta$, ainsi $dx = -R \sin \theta \, d\theta$. Il ne faut pas oublier de convertir les bornes des intégrales : $\theta(x = -R) = \pi$ et $\theta(x = R) = 0$. L'intégrale à calculer est donc :

$$A = -2 \int_{\pi}^0 \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta} \sin \theta \, d\theta = 2R^2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sin \theta \, d\theta$$

Or nous savons que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha$, donc A se réécrit simplement :

$$A = 2R^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$$

Pour calculer cette intégrale, il faut linéariser le sinus (i.e. il faut enlever le carré). Pour cela, il faut revenir à la définition même du sinus : $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. En effet :

$$\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = -\frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2e^0}{4} = -\frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}}_{=\cos(2x)} - 1 \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

Il vient :

$$A = R^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) \, d\theta = R^2 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi} = \pi R^2$$

C'est un résultat bien connu de tous, et nous sommes donc certain de notre calcul. Cependant, il est possible de procéder d'une manière encore plus rapide. On peut par exemple directement raisonner en coordonnées cylindriques. En effet, le $dx dy$ des cartésiens se réécrit en polaire de cette façon : $dr \, r d\theta$. Ainsi, dans un disque, le rayon balaye tout de 0 à R et l'angle balaye tout de 0 à 2π . Ce qui se résume par : $D = [-R, R]_x \times [-R, R]_y = [0, R]_r \times [0, 2\pi]_{\theta}$. Le calcul de A devient donc très simple :

$$A = \iint_D dx dy = \iint_D r dr d\theta = \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$

Pour calculer la circonférence d'un cercle, c'est également très facile. On fixe $r = R$ (ainsi $dr = 0$ et on fait varier θ de 0 à 2π :

$$C = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$

Si nous avons un cylindre de hauteur h , les calculs sont les mêmes sauf que l'on fait courir z de 0 à h en plus. Un bon exercice serait de redémontrer que le volume d'un cylindre est $\pi R^2 h$ et que son aire (sans les disques aux extrémités) est $2\pi R h$.

NB : Ce résultat de volume élémentaire (i.e. $dV = r dr d\theta dz$) semble venir de nulle part. Cependant, il est tout à fait intuitif. Dans la direction de \vec{e}_r , le point M peut se déplacer de dr ; dans la direction \vec{e}_{θ} , le point M peut se déplacer de $r \sin(d\theta) \sim r d\theta$ (car $d\theta \rightarrow 0$) ; et enfin, dans la direction \vec{e}_z , le point M peut se déplacer de dz . C.f la section **compléments** (page 13) pour plus de détails.

2 Intégrales en coordonnées sphériques

Nous venons d'aborder le disque et le cylindre, nous allons maintenant nous s'attarder sur la sphère. Considérons une sphère S de centre O , et de rayon R . Nous savons que dans ce cas, le domaine S de la sphère est donnée par tout les points qui vérifient $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Intégrer sur le domaine d'une sphère est indigeste, et il est donc préférable de se rabattre sur les coordonnées sphériques. Tout d'abord, nous allons introduire 3 nouvelles variables : $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ avec $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Voici les relations de

transformations :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Avec pour définition :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \end{cases}$$

Voici un petit schéma récapitulatif (**attention**, l'angle θ n'est pas le même que pour les coordonnées cylindriques) :

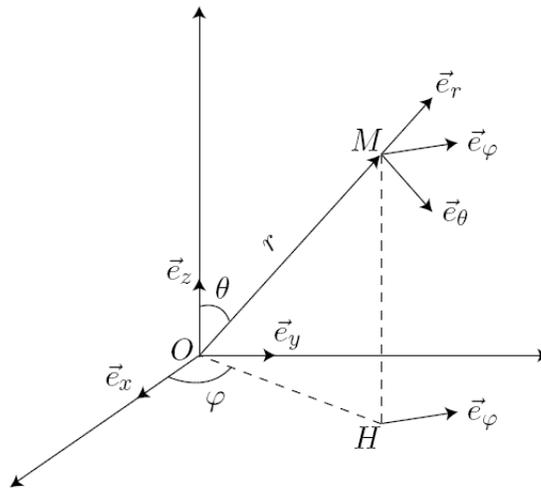


FIGURE 2 – Représentation spatiale des coordonnées sphériques

Passons maintenant aux calculs de la surface S d'une sphère, et au volume V d'une boule. Pour cela il faut trouver l'équivalence en sphérique de $dx dy dz$ (le volume infinitésimal). Une méthode simple pour y parvenir, c'est d'utiliser le vecteur vitesse en sphérique : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$. En effet, les déplacements élémentaires sont donnés par la relation $d\vec{l} = \vec{v} dt = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r d\varphi \sin \theta \vec{e}_\varphi$. Cependant si on compare des vecteurs "déplacement élémentaire" en cartésienne et en sphérique : (dx, dy, dz) versus $(dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi)$ on peut en déduire que $dV = dx dy dz \Leftrightarrow dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$.

Un bon exercice serait de retrouver le volume infinitésimal d'un cylindre (i.e. $r dr d\theta dz$) avec le même cheminement.

Maintenant que nous connaissons dV , nous pouvons calculer le volume d'une boule. Tout d'abord, pour la boule nous savons que $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]^1$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Il suffit donc d'intégrer avec ces bornes. Nous obtenons donc :

$$V = \iiint_S r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Le calcul pour obtenir la surface d'une sphère est similaire au dernier, sauf que l'on fixe $r = R$ et donc $dr = 0$. Les bornes pour θ et φ sont les mêmes qu'avant. Nous obtenons donc :

$$S = \iint_S R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 \times 2 \times 2\pi = 4\pi R^2$$

Les équivalences que l'on a vu dans cette partie sont à connaître, et à maîtriser pour mener à bien les calculs de flux et de circulation sur les champs vectoriels.

1. θ ne varie que de 0 à π à cause de φ , qui lui peut faire un tour complet. Limiter θ ainsi, est la seule façon de n'avoir qu'un seul et unique point si on nous donne les 3 coordonnées (r, θ, φ) .

Notons par ailleurs que pour calculer la masse d'une sphère de masse volumique $\rho(r, \theta, \varphi)$, il suffit d'intégrer la masse volumique sur toute la sphère (le même raisonnement est à faire avec le cylindre, et pour des répartition surfaciques et linéiques).

3 Calcul de flux et de circulation

3.1 Calcul de flux

Définition. Le flux Φ d'un champ vectoriel \vec{F} à travers une surface orientée S , de vecteur normal $d\vec{S}$, est défini par la relation :

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Au delà de cette définition, Φ symbolise la quantité de \vec{F} qui passe à travers S . Donc si le champ est perpendiculaire au vecteur normal, le flux de ce champ à travers cette surface sera nul.

Prenons un exemple : soit $\vec{F}(x, y, z)$ un champ vectoriel de composante $(x + z, y, x)$. Calculons le flux de ce champ à travers le disque de centre O, de rayon 1, et perpendiculaire à \vec{e}_z .

- Il faut tout d'abord restreindre le champ à la surface considérée, donc passer de $\vec{F}(x, y, z)$ à $\vec{F}(r, \theta, z)$. Dans notre cas, le champ devient : $(r \cos \theta, r \sin \theta, r \cos \theta)$ (il n'y a pas de z car notre surface se trouve sur le plan $z = 0$).
- Ensuite, il faut exprimer le $d\vec{S}$ qui est égal à $dS \vec{n}$ (où dS est la surface élémentaire, et \vec{n} est le vecteur normal). En se ramenant à la partie 1 on trouve que $dS = r dr d\theta$. Et d'après l'énoncé, $\vec{n} = \vec{e}_z$.
- Enfin, il faut définir les bornes pour le calcul de l'intégrale. Ici, $r \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\Phi = \iint_S (r \cos \theta, r \sin \theta, r \cos \theta) \cdot (0, 0, 1) r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta dr d\theta = \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

Eh oui, tout ça pour ça. Le flux de ce champ vectoriel est nul! Cela est dû au signe de x . En effet, la composante suivant z du champ a un signe différent selon le signe de x . Tantôt le champ entre, tantôt il sort; et la quantité globale du champ qui rentre ou qui sort de S est nulle (il est conseillé de faire un schéma pour bien visualiser le problème).

Théorème de Gauss. Le flux d'un quelconque champ vectoriel \vec{F} à travers une surface S fermée est égal à l'intégrale triple, sur le volume V renfermé par S , de la divergence de ce champ.

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$$

NB : le code \LaTeX ne connaît pas la double intégrale avec le rond (pour dire "intégrale de surface fermée").

Ce théorème est très utilisé en électromagnétisme, car les équations de Maxwell nous donnent des informations sur la divergence des champs électriques et magnétiques.

Reprenons l'exemple précédent, mais cette fois, S est une sphère de centre O et de rayon 1. Nous rappelons que la divergence d'un champ vectoriel se calcule ainsi : $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ où $\vec{\nabla}$ est le vecteur différentiel *nabla* qui a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}}$$

Ainsi, comme $\vec{F} = (x + z, y, x)$ on obtient ; $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1 + 1 = 2$. Il faut donc intégrer "2" sur le volume que renferme la sphère : c'est le volume d'une boule.

$$\Phi = 2V_{boule} = 2 \iiint_V dV = \frac{8}{3}\pi$$

Un bon exercice pour se convaincre de la puissance de ce théorème, est de refaire le calcul sans le théorème... Cependant, il faut faire attention en utilisant la définition de la divergence ; car les vecteurs des bases mobiles doivent également être dérivés. C'est pourquoi, il est préférable de se référer à une table lorsque l'on doit calculer la divergence d'un vecteur en coordonnées polaires ou sphériques. Allez voir la section **compléments** (page 14) pour plus de détails.

3.2 Calcul de circulation

Définition. La circulation d'un champ vectoriel \vec{F} le long d'une courbe orientée Γ , de vecteur déplacement $d\vec{l}$ (tangent à Γ), s'écrit :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

En mécanique, on appelle cela un travail. En effet, on a bien $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$. Cependant, il est parfois plus simple de changer la notation de $d\vec{l}$ en $\vec{v}dt$ (comme en mécanique, encore une fois). Évitions les grands discours et passons aux exemples pour y voir plus clair :

Considérons une courbe Γ défini par la représentation paramétrique $\vec{\gamma}(t)$. Calculons la circulation d'un champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z)$ le long de Γ pour $t \in [-2, 2]$.

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_z\}} \quad \text{et} \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_z\}}$$

- Calculons tout d'abord le produit $\vec{v}dt$ qui se rapporte simplement à $\dot{\vec{\gamma}}(t)dt = (1, 2t, 0)dt$.
- Ensuite, il faut restreindre \vec{F} à la courbe : $\vec{F}(x, y, z) \rightarrow \vec{F}(t)$. Or, d'après $\vec{\gamma}(t)$ on voit que $x = t, y = t^2$ et $z = 0$, ainsi $\vec{F}(t) = (t, t^2, 0)$.
- Il suffit maintenant de calculer le produit scalaire : $\vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)$ et intégrer sur $t \in [-2, 2]$.

$$C = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_{-2}^2 t + 2t^3 dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-2}^2 + 2 \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{2}(4 - 4) + \frac{1}{2}(16 - 16) = 0$$

Ce résultat, on aurait pu le voir directement en remarquant que l'on intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à 0.

Théorème de Stokes. La circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe fermée Γ est égale au flux du rotationnel de ce champ, à travers la surface S délimitée par la Γ .

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Le rotationnel d'un vecteur est défini par le produit vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$. Ce nouveau vecteur nous informe sur la rotation du vecteur \vec{F} (sens, direction,...). Cependant, il faut également faire attention en utilisant la définition du rotationnel ; car les vecteurs des bases mobiles doivent également être dérivés. C'est pourquoi, il est préférable de se référer à une table lorsque l'on doit calculer le rotationnel d'un vecteur en coordonnées polaires ou sphériques. Allez voir la section **compléments** (page 14) pour plus de détails.

A titre d'exercice on pourra calculer la circulation du \vec{F} de l'exemple précédent, le long du cercle unité de centre O et inclus dans le plans (Oxy) . Le résultat de ce calcul sera 0 également.

Cas des champs conservatifs. Un champ vectoriel \vec{F} est dit conservatif s'il dérive d'un potentiel V ou s'il est irrotationnel (i.e. $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$). Ainsi, il existe des formules simplificatrices pour le calcul de la circulation d'un champ conservatif le long d'une courbe Γ (qui a pour extrémité les points \vec{r}_1 et \vec{r}_2) :

$$C = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \quad \text{et} \quad \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

En mécanique, on voit que lorsque l'on a une force conservatrice, le travail ne dépend pas du chemin suivi. En effet, le travail du poids c'est $\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mg\vec{e}_z d\vec{l} = -mgdz$ donc $W = -mgz + \text{Cte}$ (en intégrant sans borne). Sachant que le poids est une force conservatrice et que le travail est la circulation du poids, on obtient naturellement :

$$C = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = -[mgz]_{z_A}^{z_B} = -mg(z_B - z_A)$$

Pour être certain du signe : on voit bien que le poids travaille lorsque $z_A > z_B$ et que le poids est résistant lorsque $z_B > z_A$. Par ailleurs, on voit que le potentiel dont dérive le poids est $V = -mgz$. Enfin, si dans notre calcul $A = B$ (i.e. Γ est une courbe fermée), alors le travail (ou la circulation) du poids est nul.

Un moyen assez simple pour déterminer le potentiel dont dérive un champ conservatif, c'est de résoudre l'équation $\text{grad } V = \vec{F}$. Le gradient d'une fonction scalaire c'est simplement égale à $\vec{\nabla} V$, soit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}}$$

4 Lois fondamentales de l'électromagnétisme classique

Dans cette partie, nous allons donner les formules sans rentrer dans le détail (mathématique comme historique). Cette partie est donc à considérer comme un fiche de révision, et non comme un cours à part entière.

4.1 Lois de Coulomb et de Lorenz

Avant la mise en évidence de l'existence des champs électriques et magnétiques, les scientifiques se sont penchés sur les particules chargées (comme les électrons). Coulomb a déterminé de façon empirique l'expression de la force électromagnétique qui agit entre deux charges q et q' séparés par une distance r :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ensuite on a postulé que chaque charge génère un champ électrique \vec{E} et que l'expression de ce champ électrique est :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{tel que} \quad F = qE$$

Maintenant que la norme du champ électrique est défini, il faut encore définir son sens et sa direction. Par convention, une charge q repérée dans l'espace par le point P génère un champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace, tel que :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{e}_{PM}$$

Et pour mettre en évidence le champ magnétique, il faut observer l'effet de ce dernier sur une charge possédant une vitesse non nulle, c'est ce qu'a fait Lorenz. En effet, si on soumet une charge q de vitesse \vec{v} à un champ magnétique \vec{B} on observe l'apparition d'une force qui courbe la trajectoire de la charge :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Loi le Lorenz généralisée. La loi de Lorenz généralisée est une équation qui lie charge (q), champ électrique (\vec{E}) et champ magnétique (\vec{B}). Cette relation est fondamentale lorsque l'on étudie la dynamique d'un système chargé, car elle permet de donner la force électromagnétique totale qui agit sur le système. La loi s'écrit simplement :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

4.2 Relation entre potentiel et champs électromagnétiques

On définit la fonction scalaire V comme étant le potentiel électrique dont dérive \vec{E} . Mathématiquement parlant, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \partial_t \vec{A}$. Donc, en un point M donné on a :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On définit également un potentiel vecteur \vec{A} comme étant le potentiel magnétique dont dérive \vec{B} . On prendra comme définition : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ (l'expression analytique du potentiel vecteur sera donné plus loin, dans la section 5.1).

5 Équations de Maxwell et calculs de champs

Les équations de Maxwell sont au nombre de 4. Elles lient les champs électromagnétiques à leurs sources respectives (charges et courants); et elles lient également le champ électrique au champ magnétique.

$$\vec{E} : \begin{cases} \overrightarrow{\text{div}} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{MAXWELL-GAUSS} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{MAXWELL-FARADAY} \end{cases}$$

$$\vec{B} : \begin{cases} \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 & \text{MAXWELL-THOMSON} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{MAXWELL-AMPÈRE} \end{cases}$$

- ρ est la densité de charge du système.
- ϵ_0 est la permittivité électrique du vide.
- \vec{j} est la densité de courant du système.
- μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

Nous pouvons maintenant traduire chaque équation pour en tirer des informations sur les champs électromagnétiques :

Maxwell-Gauss. Cette équation lie le champ électrique à sa source : les charges électriques. Cette équation est même la preuve irréfutable qu'il existe des charges électriques.

Maxwell-Faraday. Cette équation montre que le champ électrique et le champ magnétique sont liés seulement si \vec{E} et \vec{B} ont chacun une dépendance temporelle.

Maxwell-Thomson. Cette équation nous dit qu'il n'existe pas de charge magnétique. Autrement dit, il n'existe pas de source magnétique ponctuelle.

Maxwell-Ampère. Cette équation lie le champ magnétique à sa source : le courant électrique. Elle lie même les champs électriques et magnétiques entre eux via une dépendance temporelle.

Cependant en première année de licence on ne regarde que le cas où les champs sont invariants au cours du temps. On parle alors de régime permanent. Dans ce régime, les équations de Maxwell se simplifient; et par la suite, quand nous parlerons des équations de Maxwell, nous nous entendrons par là "les équations de Maxwell indépendantes du temps".

$$\vec{E} : \begin{cases} \overrightarrow{\text{div}} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{B} : \begin{cases} \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

5.1 Lois de Biot et Savart et de Coulomb dans le cas continu

Voici les formules sans démonstrations (elles permettent de calculer les différents champs générés par l'ensemble des points P d'un système Σ , en tout point M de l'espace) :

-Pour le champ électrique (Loi de Coulomb dans le cas continu) :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM} dV$$

-Pour le champ scalaire du potentiel électrique :

$$V(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} dV$$

-Pour le champ magnétique (Loi de Biot et Savart) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \vec{j}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV$$

et si on a un fil :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} d\vec{\ell} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

-Pour le potentiel vecteur (Loi de Biot et Savart) :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\vec{j}}{\|\overrightarrow{PM}\|} dV$$

5.2 La lumière et les ondes électromagnétiques

Cette partie est hors programme en L1, mais elle est intéressante à mon sens. Rendons nous dans le vide, là où $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$; les équations de Maxwell dépendantes du temps s'écrivent donc :

$$\vec{E} : \begin{cases} \overrightarrow{\text{div}} \vec{E} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{B} : \begin{cases} \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Le fait que les divergences sont nulle reflète bien l'absence de charges et de courants. Calculons le d'abord

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Mais l'analyse vectorielle nous dit que

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

En effet, dans le vide, la divergence du champ électrique est nulle. Ainsi, on a :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On trouve la même équation pour le champ magnétique en calculant le rotationnel de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Or l'équation $\Delta Y = \frac{1}{v^2} \partial_t^2 Y$ est l'équation des ondes de d'Alembert, où v est la vitesse de l'onde Y . Dans notre cas, l'onde électromagnétique a une vitesse de :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Donc la lumière est une onde électromagnétique !

5.3 Conservation de la charge

Cette loi permet de lier la charge totale d'un système à sa densité de courant. La démonstration est assez triviale : reprenons l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En prenant la divergence de cette équation on trouve :

$$\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{div}(\vec{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \text{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Cependant, d'après les résultats de l'analyse vectorielle on a $\text{div}(\text{rot } \vec{a}) = 0 \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Et comme la divergence fait intervenir une dérivation spatiale, on peut intervertir la dérivé spatiale et la dérivé temporelle (i.e. théorème de Schwartz). On trouve donc :

$$0 = \mu_0 \text{div}(\vec{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t}$$

En se rappelant de l'équation de MAXWELL-GAUSS, on a :

$$0 = \mu_0 \text{div}(\vec{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$$

Et donc, la loi de conservation de la charge d'écrit :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Une autre méthode consiste à considérer un volume V fermé : la variation au cours du temps de la charge totale à l'intérieur de V est égale à l'opposé du courant traversant la surface S entourant V . C'est-à-dire :

$$I = - \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Or par définition :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Nous pouvons donc réécrire cette relation :

$$- \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Cependant, d'après le théorème de Gauss (comme S est une surface fermée), on peut remplacer :

$$- \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \text{div } \vec{j} \, dV \Leftrightarrow \iiint_V \left(\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

5.4 Symétries de champs

Il est souvent préférable de considérer les symétries du problème avant de se lancer dans les calculs. Il y a uniquement 3 "lois" empiriques qu'il faut connaître pour *deviner* comment sera la champ électromagnétique :

1. Le champ électrique est symétrique par rapport aux plans de symétries du système, et est anti-symétrique par rapport aux plans d'anti-symétries du système.
2. Le champ magnétique est anti-symétrique par rapport aux plans de symétries du système, et est symétrique par rapport aux plans d'anti-symétries du système.
3. Le champ électromagnétique obéit aux mêmes lois d'invariances (par rotation, et par translation) que le système.

Cela peut sembler assez flou². C'est pourquoi nous allons considérer quelques exemples. Considérons d'abord un plan infini chargé (on assimile ce plan au plan Oxy) qui engendre un champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ dans tout l'espace. Tout d'abord, nous remarquons que le système est invariant par translation suivant x et y . Ainsi, d'après la "loi" 3, on peut écrire que le champ électrique ne dépend pas de x , ni de y : $\vec{E}(z)$. Ensuite, le plan chargé a un plan d'anti-symétrie qui est le plan Oxy . Et le plan Oyz est plan de symétrie :

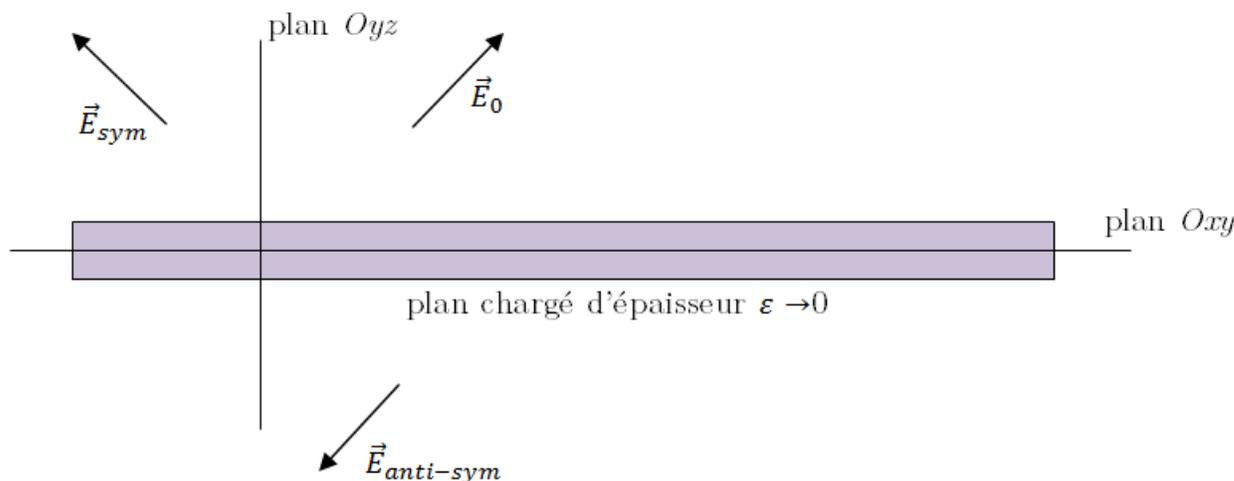


FIGURE 3 – Symétries du champ électrique pour le plan infini chargé.

On suppose qu'on a une épaisseur ε pour le plan (on fait cette supposition pour mieux voir les choses). On place arbitrairement le vecteur \vec{E}_0 , et c'est ainsi que se placent les autres vecteurs (symétriques et anti-symétriques).

Mais comme le plan est infini, tous les plans parallèles au plan Oyz sont plans de symétrie. Donc la seule orientation qui répond à toutes les demandes est suivant l'axe Oz . Ainsi, le champ électrique généré par un plan infini chargé sera sous la forme :

$$\vec{E}(z) = E(z)\vec{e}_z$$

Un très bon exercice serait de démontrer que le champ électrique généré par un plan infini chargé uniformément en surface (on note σ_0 la densité surfacique de charge) est :

$$\vec{E}(z) = \text{sign}(z) \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

Où $\text{sign}(z) = -1$ si $z < 0$, et $\text{sign}(z) = 1$ si $z > 0$.

2. Si vous ne visualisez pas comme ça, il faut voir cela de façon plus géométrique : le champ \vec{E} est perpendiculaire aux plans d'anti-symétries, et est parallèle aux plans de symétries du système. Pour le champ magnétique, c'est l'inverse : \vec{B} est parallèle aux plans d'anti-symétries, et est perpendiculaire aux plans de symétries du système.

Considérons maintenant un fil infini posé sur l'axe Oz , traversé par un courant d'intensité I (orienté vers les z croissants). Ce fil génère un champ magnétique dans tout l'espace : $\vec{B}(r, \theta, z)$ (on prend les coordonnées cylindriques). Nous remarquons d'abord que le système est invariant par rotation d'angle θ , et par translation suivant z . Donc le champ magnétique ne dépendra que de la coordonnée radiale r . Les plans parallèles au plan Oxy sont plans d'anti-symétrie et les plans comme Oyz , qui passent par l'axe Oz , sont plans de symétrie :

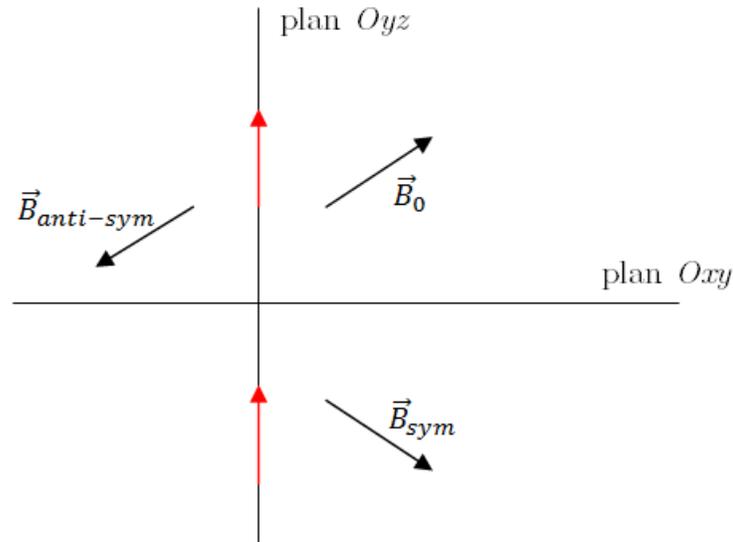


FIGURE 4 – Symétries du champ magnétique pour le fil infini. Les flèches rouge représentent le sens de circulation du courant.

Si on place le vecteur \vec{B}_0 ainsi, c'est comme cela que se placeraient les autres vecteurs (symétrique et anti-symétrique). Donc d'après notre deuxième "loi", le champ magnétique est orienté suivant \vec{e}_θ . Ainsi, pour un fil infini :

$$\vec{B}(r) = B(r)\vec{e}_\theta$$

Un bon exercice serait de montrer que le champ magnétique s'écrit ³ :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

5.5 Théorème de Gauss et théorème d'Ampère

Parfois, il est impossible d'utiliser la loi de Coulomb ou de Biot-et-Savart. Il faut alors trouver une alternative pour contourner la difficulté mathématique : les théorèmes de Gauss et d'Ampère. Ces théorèmes sont fondamentaux en électromagnétisme, et doivent être maîtrisés. Notons que les démonstrations qui suivent ne sont vraies que pour le cas statique (i.e. $\partial_t \vec{B} = 0 = \partial_t \vec{E}$).

5.5.1 Théorème de Gauss

On considère un système physique portant des charges dont la densité est ρ . Ce système génère un champ électrique \vec{E} dans tout l'espace. Imaginons une *surface de Gauss*, fermée \mathcal{S} entourant un volume noté \mathcal{V} qui entoure le système (totalement ou partiellement). Calculons le flux du champ électrique à travers \mathcal{S} :

$$\Phi_E = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} \, dV = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Où Q_{int} est la charge se trouvant dans le volume \mathcal{V} . Ainsi, nous obtenons le théorème de Gauss :

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}}$$

3. Cela fera l'objet d'un exercice corrigé, dans la partie "Magnéto-statique", et dans la section suivante.

Exemple d'utilisation pour retrouver la loi de Coulomb : prenons une charge ponctuelle q centrée en O . Cette particule chargée génère un champ électrique \vec{E} dans tout l'espace. Pour décrire ce champ électrique, nous allons nous placer dans une base sphérique; ainsi : $\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$.

Cependant, le champ électrique suit les invariances du système; et ici on constate que le système est invariant par rotation d'angle θ et φ ⁴. Ainsi, le champ électrique ne dépend que de la coordonnée radiale r : $\vec{E} = \vec{E}(r)$.

On remarque que tous les plans passant par O sont plans de symétries du système. Le seul vecteur qui est contenu par tous ces plans est le vecteur \vec{e}_r . Donc, comme le champ électrique est symétrique par rapport aux plans de symétries du système, on a : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Calculons maintenant le flux du champ électrique à travers une sphère de surface S centrée sur l'origine, et de rayon r (rappelons que le vecteur $d\vec{S}$ s'écrit $r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$, que $r = \text{cte}$ ici, et que $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) :

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E(r)r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

Mais comme $r = \text{cte}$ dans cette intégrale, on peut sortir le terme $E(r)r^2$:

$$\Phi_E = E(r)r^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = E(r)4\pi r^2$$

Appliquons maintenant le théorème de GAUSS :

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Or Q_{int} est la charge totale à l'intérieur de la sphère S centrée sur la particule. Donc $Q_{\text{int}} = q$. Ainsi, nous retrouvons la loi de Coulomb à l'aide du théorème de GAUSS :

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

5.5.2 Théorème d'Ampère

On considère un système physique portant une densité de courant \vec{j} . Ce système engendre un champ magnétique \vec{B} dans tout l'espace. Imaginons un *contour d'Ampère* \mathcal{C} fermé enfermant une surface \mathcal{S} . Calculons la circulation du champ magnétique le long de \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Où I_{int} est le courant traversant la surface \mathcal{S} . Ainsi, nous obtenons le théorème de d'Ampère :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}}$$

Exemple d'utilisation pour le calcul du champ magnétique généré par un éclair : on assimile un éclair à un fil rectiligne "posé" le long de l'axe Oz . Le courant qui traverse cet éclair a une intensité I . Si nous nous plaçons à une distance r relativement proche de l'éclair (i.e. $r \rightarrow 0$) alors on peut considérer que l'éclair a une longueur infinie.

Nous remarquons que le plan Oxy est un plan d'anti-symétrie pour l'éclair; ainsi, le champ \vec{B} généré se trouvera dans ce plan. De plus, si nous nous plaçons dans une base cylindrique, nous remarquons que le plan défini par (\vec{e}_r, \vec{e}_z) est plan de symétrie; ainsi, le champ magnétique sera perpendiculaire à ce plan.

La seule possibilité qu'à le vecteur \vec{B} pour satisfaire des symétries du problème, c'est de s'orienter suivant le vecteur unitaire \vec{e}_θ . Notons par ailleurs que le système est invariant par rotation d'angle θ , et (supposé) invariant par translation suivant l'axe des z . Conclusion :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r) \vec{e}_\theta$$

Cherchons maintenant le contour d'Ampère qui permet d'utiliser le théorème : il faut un contour dont le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ est colinéaire à \vec{B} . Il faut donc prendre un cercle C d'axe Oz , de rayon r et de

4. Cela veut dire qu'en tournant au tour de la charge, on verra toujours la même chose : une charge q .

centre O comme contour. On a donc $d\vec{\ell} = r d\theta \vec{e}_\theta$. Ainsi, la circulation du champ magnétique le long de ce contour est :

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r)r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B(r)$$

Et d'après le théorème d'Ampère, on a également :

$$C_B = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Or ici, $I_{\text{int}} = I$, car le courant qui traverse la surface délimité par le contour, est le courant qui traverse l'éclair : I . Donc nous trouvons l'expression du champ magnétique généré par un éclair à proximité de celui-ci :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

6 Compléments

6.1 Éléments de volumes, de surface, et de longueurs

Lors des calculs d'intégrales, il faut exprimer un dV , un dS ou encore un $d\ell$. A défaut de retenir le tableau suivant (TABLE 1, page 14), on peut se rappeler des formules de mécanique du point pour le vecteur vitesse. En effet, pour les différents systèmes, on a :

$$\text{Cartésien : } \vec{v}(x, y, z) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\text{Cylindrique : } \vec{v}(r, \theta, z) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\text{Sphérique : } \vec{v}(r, \theta, \varphi) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Or, la vitesse, c'est la distance $d\vec{\ell}$ parcourue pendant un instant infinitésimal dt . Ainsi, pour obtenir de déplacement élémentaire (à ne pas confondre avec l'"élément de longueur") on calcule $\vec{v}dt$:

$$\text{Cartésien : } d\vec{\ell}(x, y, z) = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

$$\text{Cylindrique : } d\vec{\ell}(r, \theta, z) = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$\text{Sphérique : } d\vec{\ell}(r, \theta, \varphi) = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

Nous remarquons qu'il y a une redondance de la notation du type : $d\vec{\ell}(i, j, k) = dl_i\vec{e}_i + dl_j\vec{e}_j + dl_k\vec{e}_k$ dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ (cette notation nous sera utile pour la suite ; pour obtenir des formules générales).

6.1.1 Cas scalaire

Maintenant, pour obtenir le déplacement suivant un vecteur unitaire \vec{e}_i , il suffit de calculer $dl_i = d\vec{\ell} \cdot \vec{e}_i$. Exemple, si on veut savoir comment se déplace un point sur une sphère s'il suit la direction de \vec{e}_r , on calcule $dl_r = d\vec{\ell}(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_r = dr$ (ici, dl_r est un élément de longueur).

Ensuite, on peut également calculer les éléments de surface : si on sait qu'une surface se trouve dans un plan défini par les vecteurs (\vec{e}_i, \vec{e}_j) on sait aussi que $dS_{ij} = dl_i \times dl_j$. Prenons deux exemples : si la surface que l'on cherche se trouve dans un plan défini par (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , alors $dS_{xy} = dl_x \times dl_y = dx dy$. Et si la surface se trouve dans le plan tangent à une sphère (c'est le plan défini par les vecteurs $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$), alors $dS_{\theta\varphi} = dl_\theta \times dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.

Enfin, pour obtenir l'élément de volume, il faut simplement calculer $dV_{ijk} = dl_i \times dl_j \times dl_k$. Exemple : $dV_{xyz} = dl_x dl_y dl_z = dx dy dz$.

6.1.2 Cas vectoriel

Dans certains cas, il faut utiliser des $d\vec{\ell}$ et des $d\vec{S}$ (pour les calculs de flux et de circulations). Les formules sont les mêmes, sauf qu'il faut ajouter le vecteur unitaire qui donne le sens et la direction aux vecteurs de longueur et de surface élémentaires.

Pour le déplacement élémentaire, c'est très simple et très intuitif : si on veut connaître $d\vec{\ell}_i$, c'est simplement l'élément de longueur dl_i suivant le vecteur \vec{e}_i : $d\vec{\ell}_i = (d\vec{\ell} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$.

Pour l'élément de surface, il faut savoir que le vecteur $d\vec{S}_{ij}$ est perpendiculaire au plan défini par (\vec{e}_i, \vec{e}_j) . Donc la façon la plus simple de déterminer la direction de $d\vec{S}$, c'est de calculer le produit vectoriel $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \vec{e}_k$ (en effet, le vecteur \vec{e}_k est bien perpendiculaire aux vecteurs \vec{e}_i et \vec{e}_j), ainsi : $d\vec{S}_{ij} = dS_{ij}(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j)$.

Reformulation mathématique

Dans une base directe et orthonormée $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$, on définit le déplacement élémentaire comme étant la quantité vectorielle :

$$d\vec{\ell}(i, j, k) = \vec{v}(i, j, k)dt$$

Pour calculer respectivement, les éléments de longueurs, de surfaces et de volume, on utilise la formule :

$$\boxed{d\ell_i = d\vec{\ell} \cdot \vec{e}_i} \quad \boxed{dS_{ij} = d\ell_i d\ell_j} \quad \boxed{dV_{ijk} = d\ell_i d\ell_j d\ell_k}$$

Et si nous voulons obtenir l'équivalence vectorielle :

$$\boxed{d\vec{\ell}_i = d\ell_i \vec{e}_i} \quad \boxed{d\vec{S}_{ij} = dS_{ij}(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) = dS_{ij} \vec{e}_k}$$

Voici le tableau récapitulatif (sans les notations i, j, k) qu'il faut savoir retrouver rapidement, et sans hésitation. Ici, nous n'avons indiqué que les éléments de longueurs, de surfaces, et de volumes, et non les vecteurs déplacements élémentaires. Un bon exercice, serait de calculer le volume et l'aire de formes géométriques simples (disque, cylindre, sphère,...) pour apprendre à manipuler ces quantités infinitésimales.

Élément	Système de coordonnées		
	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$d\ell$	dx, dy ou dz	$dr, r d\theta$ ou dz	$dr, r d\theta$ ou $r \sin \theta d\varphi$
dS	$dx dy, dy dz$ ou $dx dz$	$r dr d\theta, dr dz, r d\theta dz$	$r dr d\theta, r dr \sin \theta d\varphi$ ou $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$
dV	$dx dy dz$	$r dr d\theta dz$	$r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$

TABLE 1 – Éléments de volumes, de surfaces et de longueurs.

6.2 Divergence, rotationnel et Laplacien en coordonnées locales

6.2.1 Position du problème

Considérons un champs vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z^3)$ dans la base cartésienne. Calculons sa divergence :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (z^3) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 3z^2$$

Si nous projetons ce résultat dans la base cylindrique, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{r \cos \theta}{r} + 3z^2 = \cos \theta + 3z^2$$

Projetons maintenant le vecteur \vec{F} dans la base cylindrique :

$$\vec{F}(r, \theta, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \vec{e}_x + z^3 \vec{e}_z = r(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) + z^3 \vec{e}_z = r \cos \theta \vec{e}_r - r \sin \theta \vec{e}_\theta + z^3 \vec{e}_z$$

Or, il est logique de se dire que la divergence reste invariante par changement de base. Appliquons l'opérateur *nabla* sur ce champ "cylindrique" :

$$\begin{pmatrix} \partial_r \\ \frac{1}{r} \partial_\theta \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ z^3 \end{pmatrix} = \cos \theta - \cos \theta + 3z^2 = 3z^2 \neq \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)$$

Nous ne retrouvons pas le même résultat qu'avant. Cela est dû au fait que les vecteurs de bases comme \vec{e}_θ sont des fonctions de θ également. En effet, $\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x$. Donc la façon la plus simple de calculer la divergence du champ F , reste de projeter F en base cartésienne.

Il existe cependant une autre méthode, qui consiste à redéfinir la divergence en coordonnées cylindriques ; c'est-à-dire, on calcule la divergence sans utiliser *nabla*.

6.2.2 Démonstration pour la divergence en coordonnées cylindriques

On considère pour cette démonstration un champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(r, \theta, z)$ de composantes (f_x, f_y, f_z) et (f_r, f_θ, f_z) respectivement. Nous rappelons que :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Et sachant que $\vec{F} = f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z = f_r \vec{e}_r + f_\theta \vec{e}_\theta + f_z \vec{e}_z$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} f_x &= \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{e}_x = \vec{F}(r, \theta, z) \cdot \vec{e}_x = f_r \cos \theta - f_\theta \sin \theta \\ f_y &= \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{e}_y = \vec{F}(r, \theta, z) \cdot \vec{e}_y = f_r \sin \theta + f_\theta \cos \theta \\ f_z &= \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{e}_z = \vec{F}(r, \theta, z) \cdot \vec{e}_z = f_z \end{aligned} \quad (1)$$

La seule chose que nous savons *a priori* est l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques. Cependant, nous savons également que $\text{div } \vec{F} = \overrightarrow{\nabla f_x} \cdot \vec{e}_x + \overrightarrow{\nabla f_y} \cdot \vec{e}_y + \overrightarrow{\nabla f_z} \cdot \vec{e}_z$. Calculons donc chaque composante de la divergence de \vec{F} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla f_x} \cdot \vec{e}_x &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f_x}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f_x}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_x = \frac{\partial f_x}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f_x}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_x \\ &= \frac{\partial f_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

On trouve également :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla f_y} \cdot \vec{e}_y &= \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f_y}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f_y}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_y = \frac{\partial f_y}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial f_y}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f_y}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f_y}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_y \\ &= \frac{\partial f_y}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f_y}{\partial \theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Et aussi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla f_z} \cdot \vec{e}_z &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f_z}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f_z}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial f_z}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f_z}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

En calculant la quantité (2)+(3)+(4) on trouve la divergence de \vec{F} :

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial f_y}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f_y}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (5)$$

Injectons maintenant les résultats obtenus en (1) dans (2), (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \sin \theta &= \cos^2 \theta \frac{\partial f_r}{\partial r} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta} \cos \theta - f_r \sin \theta - \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \sin \theta - f_\theta \cos \theta \right) \\ \frac{\partial f_y}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f_y}{\partial \theta} \cos \theta &= \sin^2 \theta \frac{\partial f_r}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta} \sin \theta + f_r \cos \theta + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \cos \theta - f_\theta \sin \theta \right) \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} &= \frac{\partial f_x}{\partial z} \end{aligned}$$

En injectant ces résultats dans (5), et en simplifiant, nous obtenons :

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{f_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

Or $\partial_r(rf_r)/r = (f_r + r\partial_r f_r)/r = f_r/r + \partial_r f_r$; nous obtenons donc :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}$$

En reprenant notre exemple de la première partie, si $\vec{F}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, -r \sin \theta, z^3)$, on trouve :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cos \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(-r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 2 \cos \theta - \cos \theta + 3z^2 = \cos \theta + 3z^2$$

Ce qui est bien le résultat initialement trouvé en coordonnées cartésiennes.

NB : Un calcul similaire peut être fait en sphérique. Notons également que l'on rencontre le même problème avec le rotationnel d'un champ vectoriel (et on trouve son expression en cylindrique ou sphérique comme ici : en projetant les vecteurs de bases sur la base cartésienne).

6.2.3 Tables

Ces tables ne sont pas à connaître par cœur. Elle sont des outils que l'on utilise quand on en a besoin. Dans ces tables, on prend un vecteur générique \vec{A} , et une fonction scalaire générique V . Et nous rappelons que $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, que $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ et que $\Delta V = \operatorname{div} \operatorname{grad} V = \vec{\nabla}^2 V$

Cartésien	Cylindrique	Sphérique
$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

TABLE 2 – Divergence dans les différents systèmes de coordonnées

Cartésien	Cylindrique	Sphérique
$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$

TABLE 3 – Rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

Cartésien	Cylindrique	Sphérique
$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$

TABLE 4 – Laplacien dans les différents systèmes de coordonnées

6.3 Équations de Poisson

Pour résoudre certains problèmes en électromagnétisme, et qu'on ne connaît ni \vec{j} ni ρ mais qu'on connaît le champ magnétique ou le champ électrique, il faut trouver une autre équation qui nous permet de calculer \vec{j} et ρ . En effet, ne connaissant pas les sources, les équations de Coulomb et de Biot-et-Savart deviennent inutilisables. Les équations que nous allons essayer de déterminer, sont les équations de Poisson.

6.3.1 Cas stationnaire

Penons l'équation de MAXWELL-GAUSS, et remplaçons \vec{E} par $-\overrightarrow{\text{grad}} V$:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'équation de de Poisson pour le potentiel électrostatique s'écrit donc :

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Prenons l'équation de MAXWELL-AMPÈRE et remplaçons \vec{B} par $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Et si nous utilisons la jauge de Coulomb : $\text{div } \vec{A} = 0$, alors l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur dans le cas statique s'écrit :

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

6.3.2 Cas permanent

Refaisons la même chose manipulation, mais cette fois dans le cas permanent (donc lorsque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \partial_t \vec{A}$) :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Si on réutilise la jauge de Coulomb. Et on a également :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\text{grad}} V}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Ce qui se réécrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Si nous utilisons la jauge de Lorenz, alors $\text{div } \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t V = 0$, et donc le potentiel vecteur obéit à une sorte d'équation des ondes se propageant à la vitesse $(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$:

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j}}$$

Et donc si nous injectons la jauge de Lorenz dans l'équation de Poisson du potentiel électrique (dans le cas permanent), au lieu de la jauge de Coulomb, nous obtenons :

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow -\Delta V + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{car } \text{div } \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

Et donc nous retrouvons la même relation que pour le potentiel vecteur :

$$\boxed{\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

6.3.3 Dans le vide

Dans le vide, nous avons simplement $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$. Ainsi, dans le cas stationnaire, on retrouve les équation de Laplace : $\Delta V = 0$ et $\Delta \vec{A} = \vec{0}$. Et dans le permanent, on retrouve la "vraie" équation des ondes (sans le terme inhomogène) $\square V = 0$ et $\square \vec{A} = \vec{0}$ (où $\square = \Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2$ est le d'Alembertien).

6.4 Conservation de l'énergie électromagnétique – Théorème de Poynting

On note P la puissance électrique qui traverse un système, et $P = UI$ où U est la différence de potentiel aux bornes du système, et I est le courant qui traverse le système. Ainsi, si on regarde cette expression localement, on a $\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ (puissance rayonnée par unité de volume). Cependant, d'après la relation de MAXWELL-AMPÈRE nous avons :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ce qui se réécrit également :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \mathcal{P} + \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}$$

Mais d'après l'analyse vectorielle on sait que $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$ et donc :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \mathcal{P} + \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}$$

Et en utilisant la relation de MAXWELL-FARADAY, on obtient :

$$\mu_0 \mathcal{P} + \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

En divisant à gauche et à droite par μ_0 , et en réarrangeant les termes, on trouve finalement :

$$\boxed{\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \mathcal{P} = 0}$$

Cette relation est le théorème de Poynting, qui s'écrit aussi de façon plus compacte :

$$\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{\text{EB}}}{\partial t} + \mathcal{P} = 0$$

Où :

- $\vec{\Pi}$ est le vecteur de Poynting, ou le vecteur "flux d'énergie électromagnétique".
- u_{EB} est la densité d'énergie électromagnétique. Et on a $u_{\text{EB}} = u_{\text{E}} + u_{\text{B}}$ qui sont respectivement les densités d'énergie électrique et magnétique.
- \mathcal{P} est la densité de puissance électrique rayonnée.

Deuxième partie

Exercices

1 Calculs d'intégrales

Exercice 1 : Intégrations par parties. Montrez que la primitive de $f(x)$ est $F(x)$, pour les couples de fonctions suivantes.

- $f(x) = \ln(x)$ et $F(x) = x \ln(x) - x + K$.
- $f(x) = \cos(x)e^x$ et $F(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + K$.
- $f(x) = x \cos(x)$ et $F(x) = x \sin(x) + \cos(x) + K$.
- $f(x) = x^2 e^{-x}$ et $F(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + K$.

Exercice 2 : Intégrale Gaussienne. On appelle I_x l'intégrale Gaussienne. Le but de cet exercice sera de calculer la valeur de I_x à l'aide des coordonnées polaires.

1. Esquissez le graphique de la courbe Gaussienne, sachant qu'elle a pour equation $G(x) = e^{-\alpha x^2}$, avec $\alpha > 0$.
2. Expliquer pourquoi l'intégrale Gaussienne (ci-dessous) n'est pas facilement calculable.

$$I_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dx$$

3. En calculant $I_x \times I_y$ expliquer pourquoi on peut écrire :

$$I_x^2 = I_y^2 = I_x \times I_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy$$

4. Calculer I_x^2 en passant aux coordonnées polaires.
5. Montrer (en justifiant toute la démarche) que :

$$I_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Exercice 3 : Changement de variable. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de $\sin^3 x$ pour x allant de 0 à $\pi/2$.

1. Sachant que $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, calculer explicitement $\sin^3 x$ (cela s'appelle la "linéarisation").
2. Intégrez le résultat de 1., et vérifiez que vous trouvez $2/3$.
3. On se rappelle maintenant que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. En posant $\cos x = u$, montrez que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^1 (1 - u^2) du$$

4. Retrouvez le résultat précédent.
5. Cette méthode est à utiliser pour toutes les puissances de impaires des fonctions trigonométriques. Refaites le même calcul, avec le changement de variable, pour $\sin^5(x)$ et $\cos^5(x)$ en prenant $x \in [0, \pi/2]$ (on trouvera $8/15$ pour les deux).

Exercice 4 : Densités linéiques. Soit Γ un fil portant une densité linéique de charge λ . Calculer la charge totale Q de Γ pour les densités suivantes⁵.

- $\lambda = \lambda_0 = \text{Cte}$, et Γ est un cercle de rayon R , centré en O .
- $\lambda(\theta) = (1 - \sin(\theta))$ et Γ est le cercle unité de centre O .
- $\lambda(x) = x^2$ et Γ est la courbe caractérisée par l'équation horaire $\{x(t) = t; y(t) = t^3\}$, pour t allant de 0 à 2. On pourra se rappeler que $d\ell = |\vec{v}|dt$.
- $\lambda(x) = \frac{a_0}{x}$ où Γ est un fil rectiligne tel que $x \in [e, e^5]$.

5. On rappelle que $Q = \int_{\Gamma} \lambda(\Gamma) dt$

Exercice 5 : Densités surfaciques. Soit Σ une surface portant une densité surfacique de charge σ . Calculer la charge totale Q de Σ pour les densités suivantes⁶.

- $\sigma = \sigma_0 = \text{Cte}$ où Σ est le disque de rayon R et de centre O .
- $\sigma(r, \theta) = \sin(\theta)e^{-r^2}$ où Σ est le demi-disque de rayon R et de centre O , caractérisé par $y > 0$.
- $\sigma(x, y) = x^2 + y^2$ où Σ est un rectangle, tel que $x \in [-2, 2]$ et $y \in [-3, 3]$.
- $\sigma(x, y) = x^2y^2$ où Σ est un rectangle, tel que $x \in [-2, 2]$ et $y \in [-3, 3]$.
- $\sigma(\theta) = \gamma^2 \cos \theta$ où Σ est une sphère de rayon R et de centre O .

Exercice 6 : Densités volumiques. Soit S un volume possédant une densité volumique de charge $\rho(\vec{r})$. Calculer la charge totale de S pour les densités suivantes⁷.

- $\rho = \rho_0 = \text{Cte}$ où S est une boule de rayon R et de centre O .
- $\rho(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi$ où S est une boule de rayon R et de centre O .
- $\rho(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ où S est une demie-boule de rayon R et de centre O (où $z > 0$).
- $\rho(\theta) = \sin^4 \theta$ où S est une boule de rayon R et de centre O .
- $\rho(r, \theta, z) = z^2 e^{-r^2}$ où S est un cylindre de rayon R et de hauteur h (on prendra $z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$).

2 Electro-dynamique

Exercice 1 : Deux charges accélérées. On considère deux charges q et q' (avec $qq' > 0$). Chacune étant accélérée initialement tel que au temps $t = 0$ on a $\vec{v}_q = v_0 \vec{e}_x$ et $\vec{v}_{q'} = -v_0 \vec{e}_x$. On néglige les frottements.

1. Comment les charges agissent-elles l'une sur l'autre ?
2. Rappeler le domaine de validité du théorème de l'énergie mécanique.
3. Avec ce théorème⁸, calculer la distance r_0 à laquelle les deux charges rebrousseront chemin ; sachant qu'au temps $t = 0$, les deux charges sont séparées par une distance D .
4. Retrouver le même résultat avec la 2^{ème} loi de Newton.

Exercice 2 : Électron dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. On plonge un électron de masse m négligeable, de charge $q = -|e|$ dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Cet électron est repéré dans l'espace par le point M de coordonnées (x, y, z) , et possède une vitesse initiale au temps $t = 0$ de $\vec{v}(t = 0) = (V_{0x}, V_{0y}, V_{0z})$. On néglige les frottements, et on donne $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

1. Quelle force agit sur la particule ? Calculez-la.
2. Sous quelles conditions a-t-on un mouvement rectiligne et uniforme ?
3. On se place dans le cas le plus général (pas de MRU). Écrire les équations du mouvement en utilisant la deuxième loi de Newton (on restera dans la base cartésienne).
4. Résoudre les trois équations différentielles, écrire les équations horaires du mouvement. Comment nomme-t-on ce type de trajectoire ?
5. Écrire les équations du mouvement (sans les résoudre) dans le cas de forces de frottements de la forme $-\gamma\vec{v}$. Esquissez alors la trajectoire de ce mouvement.

Exercice 3 : Électron dans un champ électrique uniforme et stationnaire. On prend un condensateur dans lequel on lance un électron avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . Cet électron est soumis à un champ électrique constant $\vec{E} = -E_0 \vec{e}_z$. Pour ce problème on se muni d'une base cartésienne centrée en O . Les deux plaques du condensateur sont alors caractérisées par les plans $z = -D$ et $z = D$. Le vecteur \vec{v}_0 fait un angle α avec l'axe Ox , et $\vec{v}_0 \cdot \vec{e}_y = 0$. On néglige la masse de l'électron.

1. Donner les composantes du vecteur vitesse à $t = 0$.
2. Vers où ira la particule (sans faire de calcul) ?
3. On se place dans le cas où **les frottements sont négligeables**. Résoudre l'équation du mouvement $z = z(x)$.
4. Déterminer le temps au bout duquel l'électron touchera une des deux plaques du condensateur.
5. Que devient la vitesse de l'électron au bout d'un temps infini (en imaginant qu'il n'y ai plus de plaque) ?
On doit donc se placer dans le cas où **les frottements ne sont pas négligeables**.
6. On donne la force de frottement $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$. Donner les équations horaires du mouvement.

6. On rappelle que $Q = \int_{\Sigma} \sigma(\Sigma) dS$

7. On rappelle que $Q = \iiint_V \rho(V) dV$

8. On rappelle que $E_p = qV$, où V est le potentiel électrostatique.

Exercice 4 : Modèle quantique de l'atome de Bohr. Pour sauver la vision classique de l'atome, Bohr a émis une nouvelle hypothèse qui obligeait de quantifier le moment cinétique de l'électron $\ell = n\hbar$ où $n \in \mathbb{N}_+^*$. On considère que seul la force de Coulomb s'applique sur l'électron.

1. Donner l'énergie potentielle de l'électron.
2. Calculer l'énergie cinétique de l'électron (en projetant le vecteur vitesse sur la base sphérique, et en supposant $\dot{\varphi} = 0$)⁹. En déduire son énergie mécanique.
3. Calculer le moment cinétique $\vec{\ell}$ de l'électron¹⁰.
4. En utilisant le théorème du moment cinétique, démontré que ℓ est effectivement une constante (en norme et vectoriellement).
5. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left\{ \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\}$$

6. On note U_{eff} l'énergie potentielle efficace du système (la partie entre accolades). Montrer que ce potentiel efficace admet un minimum en $r = r_0$. Calculer ensuite $U_{eff}(r_0)$.
7. En fait, si $E = U_{eff}$ alors l'électron a une trajectoire circulaire de rayon r_0 . En reprenant l'hypothèse de Bohr, montrer que :

$$r_0 = \frac{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2}{me^2}n^2 \quad \text{et} \quad E = -\left(\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}\right)\frac{1}{n^2}$$

8. L'expérience nous dit que $r_0 = a_0n^2$ où $a_0 \simeq 0,53 \text{ \AA}$ et que $E = -I/n^2$ où $I = 13,6 \text{ eV}$. Vérifier ces résultats.

3 Électrostatique

Exercice 0 : Étude d'un cas standard. Cet exercice est corrigé. Mais il est conseillé de le faire ! Il permet de montrer comment s'y prendre pour cette série d'exercices.

Énoncé 1 : Calculer le champ électrique créé en tout point M de l'axe Oz par un fil circulaire de centre O et d'axe Oz. Ce fil a une répartition linéique de charge $\lambda = \lambda_0 = \text{Cte}$. Il faut utiliser la loi de Coulomb généralisé :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_P \lambda \frac{\vec{PM}}{PM^3} dl$$

Or ici $dl = R d\theta$, P a pour coordonnées $\vec{OP} = R \vec{e}_r = R(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$ et M a pour coordonnées $(0, 0, z)$. Ainsi, le vecteur \vec{PM} s'écrit :

$$\vec{PM} = \begin{pmatrix} -R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}}$$

Donc $PM = \sqrt{R^2 + z^2}$. Ainsi, le calcul du champ est simple :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \frac{R d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} d\theta$$

Et finalement :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} z \vec{e}_z$$

9. Ce résultat se démontre, mais cela sort du cadre de cet exercice. C'est pourquoi doit admettre que $\dot{\varphi} = \text{Cte}$.

10. On rappelle que $\vec{\ell} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

On peut également déterminer le potentiel électrique. L'équation $-\overrightarrow{\nabla V} = \vec{E}$ nous dit que :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -K z (R^2 + z^2)^{-3/2} \Leftrightarrow V(z) = -K \int z (R^2 + z^2)^{-3/2} dz = \frac{K}{\sqrt{R^2 + z^2}} + C$$

Et donc le potentiel électrostatique vaut (si on prend $V = 0$ à l'origine) :

$$V(M) = \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right)$$

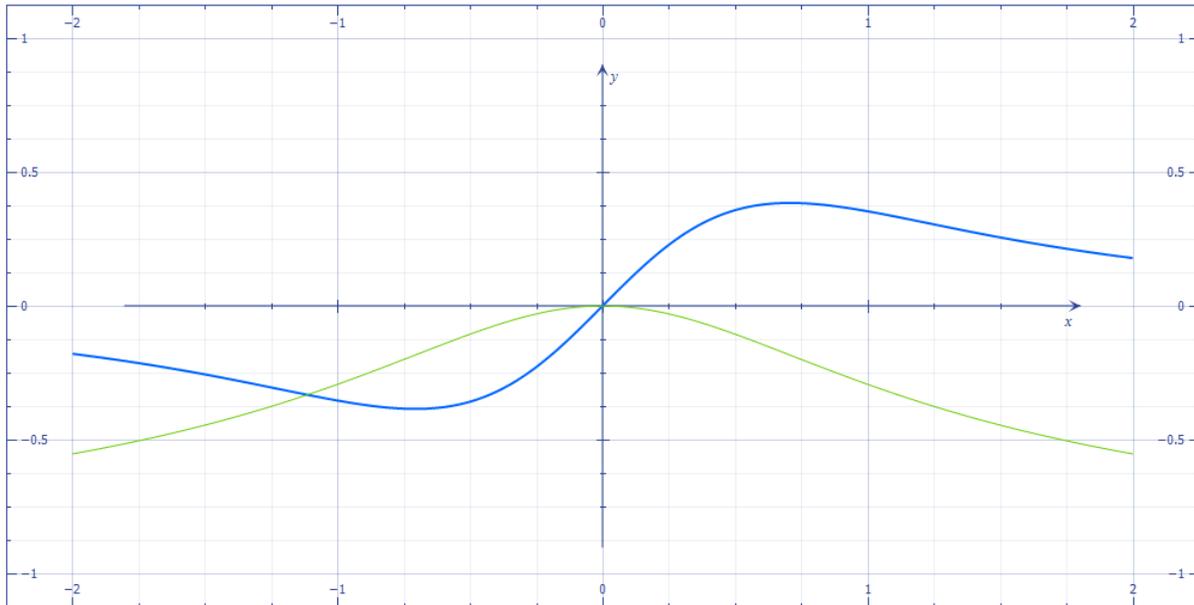


FIGURE 5 – Champs générés par un cerceau électrique.

On a le potentiel (en vert) et la composante suivant z du champ électrique (en bleu). Les échelles ne sont pas respectées (ni les unités d'ailleurs). On a prit $R = 1$.

Énoncé 2 : Calculer le champ électrique créé en tout point M de l'espace engendré par une boule chargée en volume de rayon R . On notera ρ_0 la densité volumique de charge, et on la supposera constante. On utilisera le théorème de Gauss.

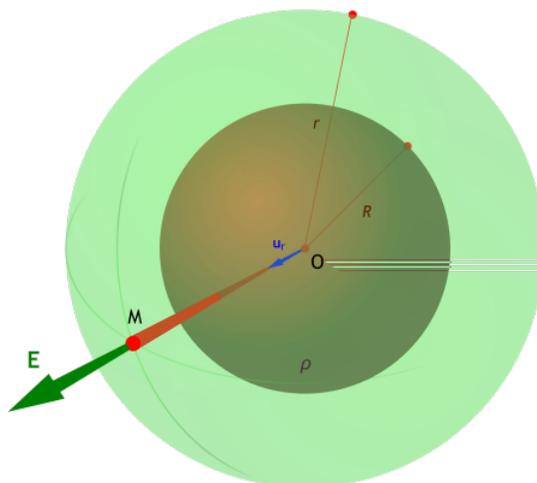


FIGURE 6 – Sphère chargée en volume.

En vert, la sphère de rayon r , et en rouge (dans la sphère verte) nous avons la sphère chargée en volume, de rayon R et de densité volumique de charge ρ constante.

Calculons tout d'abord la charge totale d'une sphère de rayon r_o centrée sur l'origine.

$$dQ = \rho dV \Rightarrow Q(r_o) = \iiint_V \rho dV = \rho_0 \iiint_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{r_o} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \rho_0 \pi r_o^3$$

Ainsi la charge totale d'une sphère quelconque, centrée sur l'origine et de rayon r est :

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{4}{3} \rho_0 \pi r^3 & \text{si } r < R \\ \frac{4}{3} \rho_0 \pi R^3 & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

–Considérons les symétries de \vec{E}

Le champ électrique est symétrique par rapport aux plans de symétries du système; et antisymétrique par rapport aux plans d'antisymétries du système. Ici, tout les plans contenant le vecteur \vec{e}_r sont plans de symétries. Ainsi, le champ électrique n'aura qu'une composante suivant \vec{e}_r .

Ensuite, le système est invariance par rotation d'angle θ et φ (on verra toujours une sphère en tournant autour de celle-ci). Ainsi, le champ électrique ne dépendra que de r .

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

–A l'intérieur de la sphère de rayon R

Calculons le plus du champ électrique à travers une sphère de rayon $r \leq R$:

$$\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Mais $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$, ainsi

$$\Phi_E = \iint E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Sans oublier que $E(r)$ est constant à rayon constant, et qu'on intègre sur une sphère (donc à rayon constant), on a simplement :

$$\Phi_E = E(r)r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 E(r)$$

Cependant, d'après l'équation de MAXWELL-GAUSS on a $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, et d'après le théorème de Gauss, on peut dire que :

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_V \text{div } \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

Et donc en égalisant les deux expressions de Φ_E , on a :

$$\frac{Q(r)}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E(r) \Leftrightarrow \frac{4}{3\epsilon_0} \rho_0 \pi r^3 = 4\pi r^2 E(r) \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$$

-A l'extérieur de la sphère de rayon R

On considère cette fois une sphère centrée en O, et de rayon $r > R$. Nous remarquons qu'on obtiendra de nouveau la même égalité que précédemment, sauf qu'il faut penser à prendre l'expression de $Q(r \geq R)$. On a donc, en reprenant les expressions du Φ_E :

$$\frac{Q(r)}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E(r) \Leftrightarrow \frac{4}{3\epsilon_0} \rho_0 \pi R^3 = 4\pi r^2 E(r) \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \left(= \frac{Q_{Tot}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)$$

-Potentiels électrostatiques

On a d'une part :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \Leftrightarrow V(r < R) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + C_1$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow V(r > R) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} + C_2$$

Cependant, il faut que $V(R)$ n'ai qu'une seule valeur (on dit que le potentiel doit être continu pour que le champ électrique (qui dérive du potentiel) soit bien défini partout dans l'espace)! Prenons arbitrairement $V(R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}$ comme condition. Ainsi on a $C_2 = 0$ et C_1 reste à déterminer :

$$\frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} R^2 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}$$

-Conclusion

Nous obtenons donc un champ électrique qui s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Et le potentiel qui va avec s'écrit ainsi (pour condition seule condition $V(R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}$) :

$$V(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Notons qu'il est très important de maîtriser ces calculs (pour l'énoncé 1 et pour l'énoncé 2). L'utilisation du théorème de Gauss est obligatoire dans ce deuxième cas! On ne peut pas utiliser la loi de Coulomb généralisée pour une sphère. Il est également très important de visualiser les résultats pour bien comprendre ce qu'il se passe (tracer les graphiques par exemple).

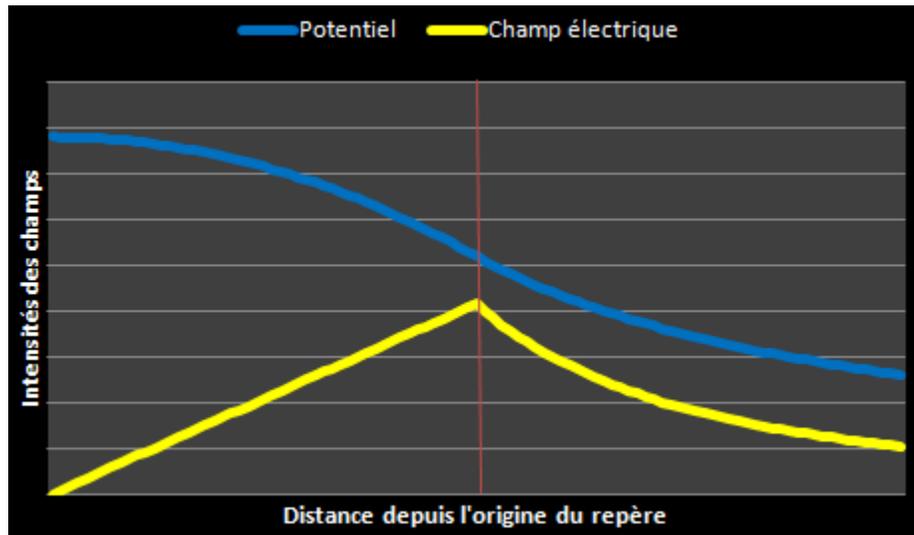


FIGURE 7 – Champs générés par une sphère chargée en volume.

Exercice 1 : L'atome d'hydrogène de Bohr. On considère l'atome d'hydrogène ${}^1\text{H}$.

1. Quel est le champ électrique généré par le proton de charge $+|e|$?
2. En déduire la force qui agit sur l'électron.
3. Calculez l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène. Pour cela, il faut calculer le travail à fournir pour "tirer" l'électron de sa position initiale ($r = a_0$) à l'infini.
4. L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est de $-13,6$ eV. Expliquer la différence observée.

On donne $1/4\pi\epsilon_0 = 8,987 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$, $|e| = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $a_0 = 53 \text{ pm}$. On rappelle que $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Exercice 2 : Modèle sommaire de l'atome d'hydrogène. On prend un atome d'hydrogène où le proton est centré à l'origine de repère. L'électron se trouve partout et nulle part à la fois (d'après la mécanique quantique). Sa probabilité de présence est proportionnelle à la densité volumique de charge ρ . Dans cet exercice, on pose $\rho = \text{Cte}$.

1. Calculez la charge totale Q qu'apporte l'électron, en intégrant sur tout l'atome de rayon a_0 la densité volumique de charge ρ . Déterminez alors la valeur réelle de ρ (en fonction des données du problème).
2. En utilisant le théorème de Gauss, calculez le champ électrique qu'engendre l'électron dans tout l'espace.
3. Calculer le champ électrique qu'engendre le proton dans tout l'espace.
4. Calculer le champ électrique total (électron et proton).
5. Déterminer alors l'expression du potentiel électrostatique total, dans tout l'espace.

Exercice 3 : Atome d'hydrogène presque réel. On prend un atome d'hydrogène où le proton est centré à l'origine du repère. L'électron se trouve partout et nulle part à la fois (d'après la mécanique quantique). Sa probabilité de présence est proportionnelle à la densité volumique de charge $\rho_e(r)$. Dans cet exercice, on pose :

$$\rho_e(r) = -\frac{|e|}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

1. Montrez que la charge totale $Q(r)$ comprise à l'intérieur d'une sphère centrée sur l'origine et de rayon r vaut :

$$Q(r) = |e| \left(1 + \frac{2r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

2. En utilisant le théorème de Gauss, calculez le champ électrique créée par cette distribution de charge.

NB : On pourra s'aider de l'exercice 1 de la partie sur les calculs d'intégrales.

Exercice 4 : Le disque chargé. On considère un disque uniformément chargé en surface, de centre O , d'axe Oz , et de rayon R . On note σ_0 la densité surfacique de charge. Calculer le champ électrique engendré en tout point M appartenant à l'axe Oz par cette distribution de charge. En déduire l'expression du potentiel électrostatique.

Exercice 5 : Le plan infini chargé. On considère un plan uniformément chargé en surface. On note σ_0 la densité surfacique de charge. Calculer le champ électrique engendré, en tout point M de l'espace, par cette distribution de charge (on utilisera le théorème de Gauss). En déduire l'expression du potentiel électrostatique.

Exercice 6 : Le cerceau chargé. On considère un cerceau chargé en surface, de centre O , d'axe Oz , de rayon intérieur a et de rayon extérieur b . On note σ_0 la densité surfacique de charge. Calculer le champ électrique engendré en tout point M appartenant à l'axe Oz par cette distribution de charge. En déduire l'expression du potentiel électrostatique. Penser à regarder les résultats obtenus pour $a = 0$ et $b = R$; $a = 0$ et $b = +\infty$: comparer avec les résultats du 4 et du 5.

Exercice 7 : Le cylindre chargé en volume. On considère un cylindre uniformément chargé en volume, d'axe Oz , et de rayon R . On note ρ_0 la densité volumique de charge. Calculer le champ électrique engendré, en tout point M de l'espace, par cette distribution de charge (on utilisera le théorème de Gauss). En déduire l'expression du potentiel électrostatique.

Exercice 8 : Le cylindre chargé en surface. On considère un cylindre uniformément chargé en surface, d'axe Oz , et de rayon R . On note σ_0 la densité surfacique de charge. Calculer le champ électrique engendré, en tout point M de l'espace, par cette distribution de charge (on utilisera le théorème de Gauss). En déduire l'expression du potentiel électrostatique.

Exercice 9 : Le fil infini. On considère un fil infini uniformément chargé, posé le long de l'axe Oz . On note λ_0 la densité surfacique de charge. Calculer le champ électrique engendré en tout point M appartenant à l'axe Ox par cette distribution de charge. En déduire l'expression du potentiel électrostatique.

Indication : on pensera à introduire l'angle $\alpha = (\vec{e}_x; \overrightarrow{PM})$.

Exercice 10 : La sphère chargée en surface. On considère une sphère uniformément chargée en surface, de rayon R et de centre O . On note σ_0 la densité surfacique de charge. Calculer le champ électrique engendré, en tout point M de l'espace, par cette distribution de charge (on utilisera le théorème de Gauss). En déduire l'expression du potentiel électrostatique.

Exercice 11 : Équations de Maxwell en gravitation. Nous allons essayer d'écrire les équations de Maxwell dans le cadre de la gravitation. On considère une boule de masse M_T et de densité de masse ρ , placée en O .

1. Donner l'expression du champ gravitationnel \vec{G} généré en tout point M de l'espace.
2. Calculer le flux de ce champ à travers une sphère de rayon R centrée sur l'origine.
3. En utilisant le théorème de Gauss démontrer que $\text{div } \vec{G} = -4\pi G\rho$. Montrer que le vecteur de gravitation a les mêmes dimensions qu'une accélération.
4. Calculer le champ gravitationnel à l'intérieur de la sphère.
5. Dans cette boule, on creuse un tunnel le long d'un de ses diamètres. A une des deux extrémités, on lâche un objet de masse m . Déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de cette masse (on suppose que le tunnel ne modifie pas le champ total, et on néglige les frottements).

4 Magnétostatique

Exercice 0 : Champ magnétique créé par une bobine. On considère une bobine ξ de rayon R , de hauteur h et d'axe Oz . Elle est constituée de plusieurs spires non jointives. On considère une répartition surfacique de charge $\vec{j}_s = j_0 \vec{e}_\theta$ (en coordonnées cylindriques). Calculer le champ magnétique engendré en tout point $M(0, 0, Z)$ de l'axe.

Solution : Ici, il faut utiliser la relation de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P \in \xi} \frac{\vec{j}_s \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} dS$$

On a, en utilisant la relation de Chasles et la projection en base cylindrique :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ Z - z \end{pmatrix}$$

D'où :

$$PM = \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{R^2 + (Z - z)^2}$$

On peut maintenant calculer le produit vectoriel de l'équation : $j_0 \vec{e}_\theta \wedge (-R \vec{e}_r + (Z - z) \vec{e}_z) = j_0 R \vec{e}_z + (Z - z) \vec{e}_r$. N'oublions pas que $dS = R d\theta dz$ dans ce cas (en effet, le rayon reste constant lors de l'intégration). On prendra $z \in [-h/2; h/2]$, et bien sur, θ va de 0 à 2π (attention, ici $Z = \text{Cte}$ dans le calcul de l'intégral ! C'est z la variable d'intégration).

$$\begin{aligned} \vec{B}(Z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{j_0 R \vec{e}_z + (Z - z) \vec{e}_r}{(R^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} R d\theta dz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{j_0 R \vec{e}_z}{(R^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} R d\theta dz + \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(Z - z) \vec{e}_r}{(R^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} R d\theta dz \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2\pi j_0 R^2}{(R^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} \vec{e}_z dz + \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\theta}_{=\vec{0}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(Z - z)}{(R^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} R dz \right\} \\ &= \frac{j_0 \mu_0 R^2}{2} \vec{e}_z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz}{(R^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{j_0 \mu_0}{2R} \vec{e}_z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz}{\left(1 + \left(\frac{Z-z}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

Cette intégrale n'est pas triviale. C'est pourquoi il est appréciable d'utiliser un changement de variable : introduisons l'angle $\alpha = (\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MP})$ tel que $\tan \alpha = R/(Z - z)$. On trouve¹¹ donc que $z = Z - R \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$, ainsi nous pouvons calculer la différentielle de z en fonction de la différentielle de α ¹² :

$$\begin{aligned} dz &= \underbrace{dZ}_{=0} - R d \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) \\ &= -R \frac{-\sin(\alpha) \times \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \times \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} d\alpha \\ &= R \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} d\alpha \\ &= \frac{R}{\sin^2(\alpha)} d\alpha \end{aligned}$$

Posons que l'angle α va de α_1 à α_2 (nous déterminerons ces valeurs plus tard, à la fin du calcul intégral). Nous trouvons donc :

11. Rappelons que $\tan x = \sin x / \cos x$

12. On utilise le fait que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(Z) &= \frac{j_0 \mu_0}{2R} \vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R d\alpha}{\sin^2(\alpha) \left(1 + \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)^2\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{j_0 \mu_0}{2R} \vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R d\alpha}{\sin^2(\alpha) \left(\frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{j_0 \mu_0}{2R} \vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R d\alpha}{\sin^2(\alpha) \frac{1}{\sin^3(\alpha)}} \\
 &= \frac{j_0 \mu_0}{2} \vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin(\alpha) d\alpha \\
 &= \frac{j_0 \mu_0}{2} \vec{e}_z [\cos(\alpha)]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\
 &= \frac{j_0 \mu_0}{2} [\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)] \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Cependant, en dessinant le système, on se rend compte que $\cos(\alpha) = \frac{Z-z}{\sqrt{R^2+(Z-z)^2}}$. Et pour que α "augmente" lors de l'intégration, il faut que α_1 corresponde au moment où $z = h/2$ (et donc $\alpha_2 \Leftrightarrow z = -h/2$) :

$$\begin{cases} \cos(\alpha_1) &= \frac{Z-h/2}{\sqrt{R^2+(Z-h/2)^2}} \\ \cos(\alpha_2) &= \frac{Z+h/2}{\sqrt{R^2+(Z+h/2)^2}} \end{cases}$$

Ainsi, le champ magnétique dans l'axe d'une bobine de hauteur h , de centre O et d'axe Oz est donné par l'équation suivante :

$$\vec{B}(Z) = \frac{j_0 \mu_0}{2} \left(\frac{Z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + (Z + \frac{h}{2})^2}} - \frac{Z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + (Z - \frac{h}{2})^2}} \right) \vec{e}_z$$

Exercice 0(bis) : Le fil infini. On considère un fil infini de rayon négligeable, et poser le long de l'axe Oz . Ce fil est parcouru par un courant I . Calculer le champ magnétique généré par ce fil, en tout point M de l'espace, en utilisant le théorème d'Ampère.

Solution : On se place dans une base cylindrique pour ce problème. D'après la loi de MAXWELL-AMPÈRE, nous avons que $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. C'est cette formule qu'il faudra utiliser. Mais tout d'abord, considérons les symétries du système.

-Symétries :

Le champ magnétique est symétrique par rapport à tous les plans d'anti-symétries du système, et est anti-symétrique par rapport à tous les plans de symétries du système. Dans notre cas, tous les plans de symétries sont définis par les vecteurs (\vec{e}_r, \vec{e}_z) , alors que tous les plans d'anti-symétries sont définis par le couple $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Par conséquent, comme \vec{e}_θ appartient au second couple, et pas au premier, on peut dire que :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

Mais le système est également invariant par rotation d'angle θ et par translation suivant z . Et donc, comme le champ magnétique a les mêmes invariances que le système, on aura :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

-Définition du contour d'Ampère :

Pour pouvoir utiliser le théorème d'Ampère, il faut définir un contour \mathcal{C} fermé et orienté. Ici, prenons un cercle de rayon r , de centre O , d'axe Oz et posé dans le plan Oxy . On l'orientera dans le sens trigonométrique.

Ainsi, l'élément de déplacement le long de ce contour sera $d\vec{\ell} = r d\theta \vec{e}_\theta$.

-Calculs :

Calculons la circulation du champ magnétique le long de \mathcal{C} :

$$C = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B(r)r d\theta = 2\pi r B(r)$$

Rappelons-nous du théorème de Stokes :

$$C = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{fil}} \mu_0 \vec{j} d\vec{S} + \underbrace{\iint_{\mathcal{D}-\text{fil}} \mu_0 \times \vec{0} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \mu_0 I$$

(Où \mathcal{D} est le disque de rayon r à l'intérieur de \mathcal{C}). Ce résultat vient du fait que en dehors du fil, $\vec{j} = \vec{0}$. En égalisant les expressions, on trouve :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Exercice 1 : La spire. On considère une spire de rayon R , centrée en O et posée dans le plan Oxy . Cette spire est traversée par un courant I (dans le sens trigonométrique). Calculer le champ magnétique générée par cette spire en tout point M de l'axe de la spire.

Exercice 2 : Le fil infini. On considère un fil infini, de rayon R et d'axe Oz . Ce fil est parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$.

1. Donner la valeur du courant I traversant le fil en fonction des données du problème¹³.
2. Calculer le champ magnétique généré en tout point $M(r, \theta, z)$ tel que $r > R$ (on doit retrouver le même résultat que dans l'exercice 0).
3. Calculer le champ magnétique généré à l'intérieur du fil (i.e; $r < R$).
4. Comparer les valeurs du champ en $r = R$ dans les deux cas. Conclusion.

13. On rappelle que le courant est le flux de la densité de courant à travers une surface.

Formulaire d'électromagnétisme	
Grandeurs Physiques	Formule
Potentiels	$V(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM } d\tau$
	$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{ PM } d\tau$
Champs	$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM ^3} \overrightarrow{PM} d\tau$
	$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{ PM ^3} d\tau$
Théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE	$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}$
Équation de propagation	$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$
	$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$
Équation de Poisson (cas stationnaire)	$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
	$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

TABLE 5 – Formulaire d'électromagnétisme