Résolution d'équations différentielles

Ledig Jordan

Dernière modification : 5 janvier 2015

Sommaire

Introduction

Ce petit cours est un résumé concernant la résolution d'équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2 pour la physique. Il n'y a pas de démonstrations : je ne fais qu'exposer la méthode. Plusieurs exemples y sont traités pour que le lecteur puisse se familiariser avec la méthodologie de travail.

Ce cours ne remplace pas un cours de maths. Voyez ces quelques pages comme une introduction à la résolution d'équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2.

1 Vocabulaire

Équation différentielle : c'est comme une équation "*normale*" du type $ax^2 + bx + c = 0$, sauf que ici, l'inconnue n'est pas x, mais une certaine fonction (que l'on notera ici $y(t)$). La forme la plus générale pour une équation référentielle est $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ où $y^{(n)}(t)$ est la dérivée n-*ième* de y par rapport à la variable t.

Ordre d'une équation différentielle : si nous avons une équation différentielle sous la forme $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, alors on dit qu'elle est d'ordre n (c'est le plus haut degré de dérivation).

Équation différentielle linéaire : une équation différentielle est linéaire si on trouve deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$, et que la fonction $Y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ est aussi solution. En pratique, si dans l'équation on a un terme en $y^2(t)$ ou en $\sin(y(t))$ (par exemple), alors l'équation est dite non linéaire.

Équation différentielle homogène et inhomogène : une équation différentielle est considérée comme inhomogène si elle contient un terme indépendant de $y(t)$. Par exemple $y'(t) + y(t) = 0$ est homogène ; alors que $y'(t) + y(t) = t$ est inhomogène.

2 Équation différentielle d'ordre 1

2.1 Homogène

Considérons l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \qquad a(t) \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Il faut ici résoudre l'équation du type de (1). Pour cela il faut se ramener à l'écrire de Leibniz pour les dérivées (i.e. $y'(t) = dy/dt$), et séparer des termes en t d'une part et les termes en y d'autre part. Prenons un exemple concret, et très simple :

$$\begin{aligned} y'(t) &+ \alpha y(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ y'(t) = -\alpha y(t) \\ &\Leftrightarrow\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y \\ &\Leftrightarrow\ \frac{dy}{y} = -\alpha dt \end{aligned}$$

En intégrant à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{y} dy = -\alpha \int dt \\ &\Leftrightarrow\ \ln y = -\alpha t + K \\ &\Leftrightarrow\ y(t) = e^{-\alpha t + K} \end{aligned}$$

En posant $e^K = C =$Cte, nous trouvons la solution de l'équation différentielle : $y(t) = Ce^{-\alpha t}$.

Étudions un cas plus corsé : une équation dont les coefficients ne sont pas constants : $y'(t) - t^2 y(t) = 0$. Nous pouvons tout de même procéder de la même manière que tout à l'heure :

$$\begin{aligned} y'(t) &- t^2 y(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \frac{dy}{dt} = t^2 y \\ &\Leftrightarrow\ \frac{dy}{y} = t^2 dt \\ &\Leftrightarrow\ \ln y = \frac{1}{3}t^3 + K \\ &\Leftrightarrow\ y(t) = Ce^{\frac{1}{3}t^3} \end{aligned}$$

Nous pouvons monter un peu plus en difficulté en introduisant un terme non linéaire : $y'(t) - y^2(t)/t = 0$. On utilise toujours le même algorithme :

$$\begin{aligned}
&y'(t) - \frac{y^2(t)}{t} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{t} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dy}{y^2} = \frac{dt}{t} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{1}{y} = \ln t + K \\
\Leftrightarrow\ & y(t) = -\frac{1}{\ln t + K}
\end{aligned}$$

Dernier exemple pour s'approprier la méthode :

$$\begin{aligned}
&y'(t) - \omega\sqrt{A^2 - y^2(t)} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dy}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - y^2(t)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{dy}{A\sqrt{1 - \left(\frac{y}{A}\right)^2}} = \omega\ dt \\
\Leftrightarrow\ & \arcsin\frac{y}{A} = \omega t + \varphi \\
\Leftrightarrow\ & y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

Algorithme à suivre pour résoudre une équation différentielle homogène d'ordre 1 (linéaire ou non, à coefficients constants ou non) :

1. passer en notation de Leibniz pour les dérivées.
2. considérer la dérivation comme une simple fraction, et séparer les termes en y et les termes en t.
3. intégrer le membre ne dépendant que de y, et faire de même pour le membre ne dépendant que de t (notez bien qu'il faut faire apparaitre une constante d'intégration du "coté de t").
4. écrire explicitement la solution sous forme $y(t) = f(t)$.

2.2 Inhomogène

On veut maintenant résoudre une équation différentielle du type :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \tag{2}$$

Notons $y(t)$ la solution de cette équations différentielle. Un théorème mathématique nous dit alors que l'on peut décomposer la solution ainsi : $y(t) = y_h(t) + y_s(t)$, où $y_h(t)$ est la solution de l'équation homogène associée (donc ici, l'équation 1 avec $f(t) = 0$) et où $y_s(t)$ est la solution spécifique à l'équation 2.

Pour trouver la solution spécifique de 2, il faut utiliser la solution de 1 et faire varier la constante d'intégration : c'est **la variation de la constante**. Pour y voir plus clair, utilisons l'exemple $y'(t) + \alpha y(t) = \beta$. Nous savons déjà que $y_h(t) = Ce^{-\alpha t}$. Ainsi, on va supposer $y_s(t) = C(t)e^{-\alpha t}$ (on fait varier la constante C en posant $C = C(t)$).

Injectons $y_s(t)$ dans l'équation différentielle correspondante :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y_s(t) + \alpha y_s(t) = \beta \\
&\quad \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(C(t)e^{-\alpha t}\right) + \alpha C(t)e^{-\alpha t} = \beta \\
&\quad \Leftrightarrow C'(t)e^{-\alpha t} - \alpha C(t)e^{-\alpha t} + \alpha C(t)e^{-\alpha t} = \beta \\
&\quad \Leftrightarrow C'(t)e^{-\alpha t} = \beta \\
&\quad \Leftrightarrow C'(t) = \beta e^{+\alpha t} \\
&\quad \Leftrightarrow C(t) = \beta \int e^{+\alpha t} dt = \frac{\beta}{\alpha} e^{+\alpha t}
\end{aligned}$$

Notons qu'ici, nous n'injectons pas de constante dans le calcul de la primitive de $C'(t)$. Ainsi, nous trouvons : $y_s(t) = \beta/\alpha$. Et donc la solution de l'équation différentielle est :

$$y(t) = Ce^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}$$

Une autre méthode (plus physicienne) consiste à supposer que la solution spécifique de l'équation différentielle a la même forme que le second membre. Ainsi, si nous reprenons l'équation $y'(t) + \alpha y(t) = \beta$, on voit que le second membre est une constante : on pose donc directement $y_S(t) = K$. En injectant cette fonction dans l'équation différentielle, on retrouve que $y_S(t) = K = \beta/\alpha$.

2.3 Détermination des constantes

Pour déterminer les constantes, il faut utiliser les conditions initiales (C.I.) sur la solution finale de l'équation différentielle. Exemple : considérons l'équation différentielle suivante,

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y(t) = K_0 \qquad \text{avec} \qquad y(t=0) = Y_0$$

donc la solution de l'équation homogène est donnée par

$$y_h(t) = Ce^{-\lambda t}$$

et la solution spécifique est donnée par

$$y_s(t) = \frac{K_0}{\lambda}$$

Et donc la solution totale de l'équation est :

$$y(t) = Ce^{-\lambda t} + \frac{K_0}{\lambda}$$

Or d'après les C.I. on a $y(0) = Y_0$ et donc à $t = 0$ on trouve :

$$Y_0 = Ce^0 + \frac{K_0}{\lambda} \Leftrightarrow C = Y_0 - \frac{K_0}{\lambda}$$

Et donc la solution de l'équation différentielle dans le cas présent est :

$$y(t) = \frac{K_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + Y_0 e^{-\lambda t}$$

3 Équation différentielle linéaires d'ordre 2

3.1 Homogène

On considère ici les équations du type :

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0 \tag{3}$$

où a,b et c sont des constantes réelles.

Pour résoudre (3) il faut se ramener à l'équation caractéristique de l'équation différentielle :

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{4}$$

On associe donc une puissance à chaque degré de dérivation, et on remplace y par r. On appelle r les racines de l'équation caractéristique.

Ensuite, il faut résoudre cette équation caractéristique en trouvant les solutions r_1 et r_2 de (4). Pour cela, on calcule en premier lieu le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Enfin, on trouve r_1 et r_2 en appliquant les formules habituelles :

$$\begin{cases} r_1 &= \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 &= \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Maintenant, pour trouver les solutions de (3) il faut considérer le signe du discriminant :

- si $\Delta > 0$ alors la solutions de l'équation différentielle est donnée par : $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.
- si $\Delta = 0$ (il n'y a qu'une seule racine $r = r_1 = r_2$) alors la solutions de l'équation différentielle est donnée par : $y(t) = (A + Bt)e^{rt}$.
- si $\Delta < 0$ (il y a 2 racines complexes $r_{1/2} = \alpha \pm i\beta$) alors la solutions de l'équation différentielle est donnée par (ces trois écritures sont équivalentes) :
  1. $y(t) = (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))\, e^{\alpha t}$
  2. $y(t) = Ae^{ir_1 t} + Be^{ir_2 t}$
  3. $y(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)$

Où A, B et φ sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales.

Exemple 1 : soit à résoudre

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 0 \tag{5}$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$, le discriminant est donc $\Delta = 25 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$. Le discriminant étant positif, on aura des racines réelles : $r_1 = -4$ et $r_2 = -1$. Et donc la solution s'écrit :

$$y(t) = Ae^{-4t} + Be{-t}$$

Exemple 2 : soit à résoudre

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 0 \tag{6}$$

L'équation caractéristique est $r^2+4r+5 = 0$, le discriminant est donc $\Delta = 16-20 = -4 = (2i)^2$. Le discriminant étant négatif, on aura des racines complexes : $r_1 = -2 - i$ et $r_2 = -2 + i$. Et donc la solution s'écrit :

$$y(t) = Ae^{-2t}\cos(t + \varphi)$$

Exemple 3 : soit à résoudre

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 0 \tag{7}$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$, le discriminant est donc $\Delta = 4 - 4 = 0$. Le discriminant étant nul, on aura une seule racine réelle : $r = -1$. Et donc la solution s'écrit :

$$y(t) = (A + Bt)\, e^{-t}$$

3.2 Inhomogène

On considère ici les équations du type :

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + c = f(t)$$

Où $f(t)$ est une fonction de t. Comme pour l'ordre 1, il faut tout d'abord chercher la solution de l'équation homogène $y_h(t)$. Pour trouver la solution spécifique au second membre, il faut considérer les cas suivants :

- Le second membre est de la forme $f(t) = P(t)e^{mt}$ (où $P(t)$ est un polynôme en t) : la solution particulière est de la forme $y_s(t) = t^k Q(t)e^{mt}$ où $Q(t)$ est un polynôme du même degré de $P(t)$ et avec :
  - $k = 1$ si m est solution simple de l'équation caractéristique.
  - $k = 0$ si m n'est pas solution de l'équation caractéristique.
  - $k = 2$ si m est solution double de l'équation caractéristique.
- Le second membre est de la forme $f(t) = P(t)\cos(nt)e^{mt}$ (on peut aussi avoir un sinus, et où $P(t)$ est un polynôme en t) : la solution particulière est de la forme $y_s(t) = t^k e^{mt}(Q_1(t)\cos(nt) + Q_2(t)\sin(nt))$ où $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ sont des polynômes du même degré que $P(t)$ et avec :
  - $k = 1$ si $m + in$ est solution simple de l'équation caractéristique.
  - $k = 0$ si $m + in$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- **Généralement** le second membre est de la forme $f(t) = C$ (constante) ou $f(t) = A\cos(\omega_e t)$ dans ce cas, on utilise l'intuition : la fonction que l'on dérive le moins (dans l'équation différentielle) est de la même forme que le second membre.

Exemple 1 : soit à résoudre

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 15 \tag{8}$$

La solution de l'équation homogène est donnée par la solution de (7) : $y_h(t) = (A + Bt)\,e^{-t}$. Ici, on va poser $y_s(t) = C$ (même forme que le second membre). On injecte cela dans l'équation différentielle :

$$0 + 2 \times 0 + C = 15 \Leftrightarrow C = 15$$

La solution totale est donc :

$$y(t) = (A + Bt)\,e^{-t} + 15$$

Exemple 2 : Soit à résoudre :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = Y_0\cos(2t) \tag{9}$$

La solution homogène de cette équation est la solution de (6) : $y_h(t) = Ae^{-2t}\cos(t+\varphi)$. Pour obtenir la solution spécifique de cette équation, on pose $y_s(t) = B\cos(2t+C)$ (ce qui est bien de la même forme que le second membre). Pour simplifier les calculs, on va travailler dans le plan complexe : on pose $\mathtt{y}(t) = Be^{i(2t+C)}$ tel que la partie réelle de $\mathtt{y}(t)$ donne $y_s(t)$. Le but est de déterminer B et C. Calculons les dérivés de cette fonction complexe :

$$\begin{aligned}
\mathtt{y}(t) &= Be^{i(2t+C)} \\
\dot{\mathtt{y}}(t) &= 2iBe^{i(2t+C)} \\
\ddot{\mathtt{y}}(t) &= -4Be^{i(2t+C)}
\end{aligned}$$

En injectant ces solutions dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$-4Be^{i(2t+C)} + 4 \times \left(2iBe^{i(2t+C)}\right) + 5 \times \left(Be^{i(2t+C)}\right) = Y_0 e^{2it}$$

En simplifiant par e^{2it} et en factorisant, on trouve :

$$(-4 + 8i + 5)\,Be^{iC} = Y_0 \quad \Leftrightarrow \quad Be^{iC} = \frac{Y_0}{1+8i}$$

Donc on obtient B en calculant le module de ce nombre complexe :

$$B = \left|\frac{Y_0}{1+8i}\right| = \frac{Y_0}{\sqrt{65}}$$

Et on obtient C en calculant l'argument de ce nombre complexe :

$$C = \arg\left(\frac{Y_0}{1+8i}\right) = \arg\left(\frac{Y_0(1-8i)}{65}\right) = \arctan(-8)$$

La solution totale de l'équation différentielle est donnée par la formule :

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = Ae^{-2t}\cos(t+\varphi) + \frac{Y_0}{\sqrt{65}}\cos(2t - \arctan 8)$$

3.3 Détermination des constantes

Pour déterminer les constantes, on refait appel aux conditions initiales. Cependant, pour une équation différentielle d'ordre 2, on a 2 constantes indéterminées : il nous faut donc 2 conditions initiales. On nous donne généralement $y(0)$ et $\dot{y}(0)$. **Attention** : il faut chercher les constantes une fois qu'on a la solution totale de l'équation différentielle considérée. Prenons un exemple :

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 15 \qquad \text{sachant :} \left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & Y_0 \\ \dot{y}(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

La solution totale étant :$y(t) = (A + Bt)\, e^{-t} + 15$, on a $y(0) = A + 15 = Y_0$. Donc $A = Y_0 - 15$. Et comme $\dot{y}(t) = Be^{-t} - (A + Bt)e^{-t} = 0$, on trouve $\dot{y}(0) = 0 = B - A$ ainsi $B = -A$, donc :

$$y(t) = (Y_0 - 15)(1 - t)e^{-t} + 15$$

Dernier exemple : considérons l'équation différentielle suivante

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 0 \qquad \text{sachant :} \left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & Y_0 \\ \dot{y}(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

L'équation caractéristique de cette équation est donné par $r^2 + 9 = 0$. Les racines sont donc : $r_\pm = \pm 3i$. Ainsi, $y(t) = Ae^0 \cos(3t + \varphi)$. Mais comme $y(0) = Y_0$, on a $Y_0 = A \cos \varphi$. Et sachant $\dot{y}(t) = -3A \sin(3t + \varphi)$, on trouve $\dot{y}(0) = \sin(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$. Conclusion :

$$y(t) = Y_0 \cos(3t)$$