Moments électriques et moments magnétiques
Electromagnétisme L1 SPC

Ledig Jordan

Dernière modification 19.03.2015

1 Introduction

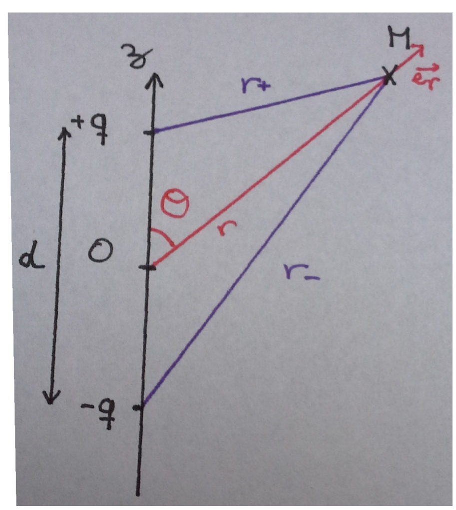
En mécanique classique, on défini le moment d'une force comme étant une grandeur vectorielle vérifiant la relation $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ (pour calculer le moment au point O avec une force appliquée en M). Le moment d'une force dit comment tourne le système autour de O si on applique la force $\vec{F}$ au point M.

Prenons l'exemple de la porte : on suppose que la porte est attachée le long de l'axe Oz (on se place dans une base cylindrique). On applique une force $\vec{F}$ dans la direction orthoradiale en un point M, à une distance r de l'axe de la porte. Donc $\vec{F} = F\vec{e}_\theta$ et $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, alors $\vec{\mathcal{M}}_O = rF\vec{e}_z$. La porte va donc tourner autour de l'axe Oz. Nous voyons également que la norme du moment augmente avec r ; ce qui est logique : il est plus facile de fermer une porte en poussant au niveau de la poignée qu'en poussant au niveau des gonds. En reprenant cet exemple, nous voyons que $r\vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_O \wedge \vec{e}_r$. Ce qui peut se réécrire :

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O \wedge \overrightarrow{OM}}{r^2}$$

Cette structure est peu connue en mécanique, mais très utilisée en électromagnétisme. En effet, cette expression donne la force, connaissant le moment et le point d'application. Essayons de voir s'il est possible de déterminer un moment électrique ou un moment magnétique vérifiant cette structure.

2 Le moment dipolaire



Considérons le système ci-contre : un ensemble de deux charges (appelé dipôle) séparés d'une distance d, placées sur l'axe Oz, équidistants de l'origine O. On se place dans une base sphérique pour les prochains calculs.

Déterminons la valeur du potentiel électromagnétique en un point M. Par définition, nous avons :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

Calculons maintenant les composantes du vecteurs $\vec{r}_+$:

$$\vec{r}_+ = -\frac{d}{2}\vec{e}_z + r\vec{e}_r = -\frac{d}{2}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + r\vec{e}_r = \left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_r + \frac{d}{2}\sin\theta\vec{e}_\theta$$

Et donc sa norme est :

$$r_+ = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - dr\cos\theta} = r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}$$

En procédant de façon analogue, nous en déduisons r_- :

$$r_- = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + dr\cos\theta} = r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}$$

Ainsi, le potentiel électrostatique devient :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\left[1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-1/2} - \left[1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-1/2}\right) \tag{2-1}$$

Cette expression très complexe ne reflète pas la physique qui s'y cache. Afin de simplifier cette expression, nous allons nous placer à une très grande distance du dipôle (i.e. $r \to \infty$). Dans ce cas, nous pouvons utiliser un développement limité dans les deux racines-inverses :

$$(1+x)^{-1/2} \;=\; 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots \quad \text{pour } x \text{ petit}$$

En utilisant un développement limité à l'ordre 1 les deux racines deviennent :

$$\left[1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-1/2} = 1 + \frac{d}{2r}\cos\theta + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$
$$\left[1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-1/2} = 1 - \frac{d}{2r}\cos\theta + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

En réinjectant ces deux expressions dans (2-1), nous obtenons :

$$V(M) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta - 1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La quantité qd est la norme du moment dipolaire électrique $\vec{p}$. Afin de réécrire $V(M)$ en fonction de $\vec{p}$, il faut définir la direction du moment : **le moment dipolaire est orienté dans l'axe des deux charges dans la direction charge *moins*–charge *plus***. Donc ici, $\vec{p} = qd\vec{e}_z$. Ainsi, le potentiel dipolaire s'écrit :

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \text{avec} \quad \vec{p} = qd\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{r} = r\vec{e}_r \tag{2-2}$$

Pour un point $\vec{r}$ éloigné du dipôle.

Si nous plaçons ce dipôle dans un champ $\vec{E}$, alors l'énergie électrostatique en ce point sera donné par $E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$. Si nous supposons que le dipôle est fixe (mais qu'il peut tourner autour de O), alors l'énergie potentielle est minimale lorsque $\theta = 0$ (lorsque le dipôle s'oriente dans la même direction que le champ électrique).

3 Le moment magnétique

Cette notion n'étant pas au programme en L1, nous allons donc nous limiter à une démonstration très succincte. Considérons un circuit $\mathcal{C}$, renfermant une surface S, à travers le-quel passe un courant I. Le loi de Biot-et-Savard nous donne l'expression du potentiel vecteur engendré par ce circuit :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P\in\mathcal{C}} \frac{d\vec{\ell}}{PM}$$

Et en utilisant un variante du théorème de Stockes[1] :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \frac{d\vec{S} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Notons qu'il n'y a pas de moins pour le gradient de $1/PM$, car le gradient ne porte que sur le point P :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_P \left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{\partial}{\partial r_P} \left(\frac{1}{|\vec{r}_M - \vec{r}_P|}\right) \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Et si on se place à grande distance du circuit, $PM \simeq r$:

$$\vec{A}(M) \sim \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \frac{d\vec{S} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\left(\iint_S I d\vec{S}\right)}_{\vec{m}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{m}$ est le moment magnétique du circuit $\mathcal{C}$. Il vient que :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{m} \wedge \vec{r} \tag{3-1}$$

pour un point $\vec{r}$ éloigné de la boucle de courant.

4 Applications

4.1 Champ magnétique associé au moment magnétique

En utilisant la relation (3-1), démontrer que le champ magnétique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3\frac{(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

En prenant un circuit circulaire, de centre O et de rayon R, posé dans le plan Oxy et perpendiculaire à l'axe Oz. Utiliser le formulaire se trouvant dans la rubrique "*fiche utile*" du site pour avoir le rotationnel en coordonnées sphériques.

4.2 Champ électrique associé au moment dipolaire

En utilisant la relation (2-2), démontrer que le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

En prenant $\vec{p} = qd\vec{e}_z$ et $\vec{r} = r\vec{e}_r$ (en base sphérique).

1. Cette relation peut être retrouvée en multipliant l'expression de $\vec{A}$ par un vecteur constant $\vec{C}$: $\oint \vec{C}/r \; d\vec{\ell} = \iint \vec{\nabla} \wedge (\vec{C}/r)$, puis en développant le rotationnel du produit $\vec{C}/r$.

4.3 La molécule d'eau

Pour répondre aux questions suivantes, aidez vous du schéma 1.

1. Donner la relation qui lie δ^+ à δ^-.
2. La molécule d'eau a-t-elle un moment dipolaire ? Expliquer pourquoi, et si oui dans quel sens est-il orienté ?
3. Le moment dipolaire de l'eau est de 1,83 D. Sachant que 1 $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}= 3.10^{29}$ D, calculer la charge partielle portée par un atome d'hydrogène et par l'atome d'oxygène.
4. Si l'atome d'eau est globalement neutre, pourquoi une règle en plastique que l'on a préalablement frotté dans les cheveux peut dévier un filet d'eau ?

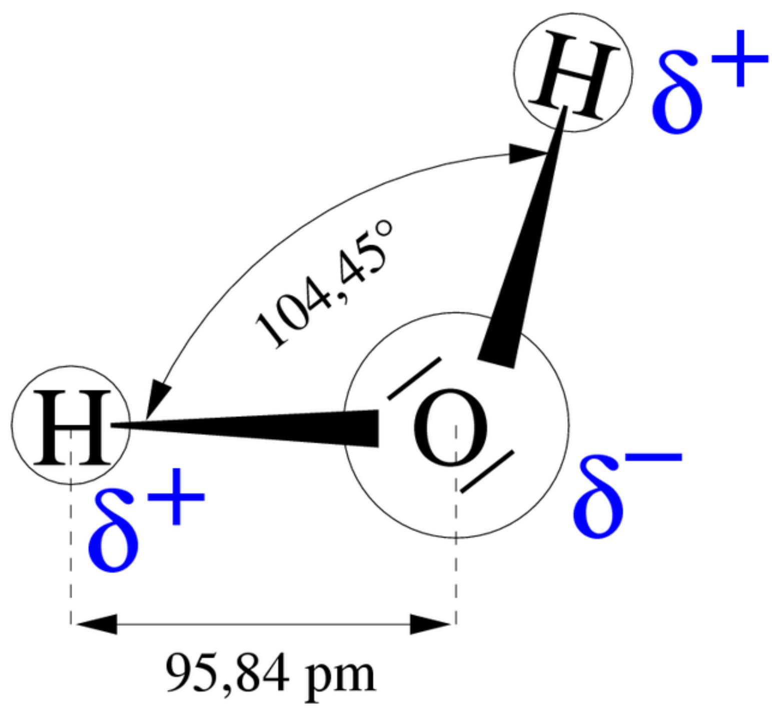


Figure 1 – La molécule d'eau

4.4 La molécule de dioxyde de carbone

Pour répondre aux questions suivantes, aidez vous du schéma 2.

On note $d/2$ la distance entre un atome d'oxygène et l'atome de carbone. On se place dans une base sphérique centrée sur l'atome de carbone, et où les molécules d'oxygène sont placées le long de l'axe Oz. On supposera que chaque atome est réduit à une charge ponctuelle q.

1. La molécule de CO_2, a-t-elle un moment dipolaire ? Expliquer pourquoi.
2. Montrer qu'en tout point $\vec{r}$ de l'espace, le potentielle $V(\vec{r})$ peut se mettre sous la forme :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_c}{r} + \frac{q_{O,1}}{r}\left[1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-1/2} + \frac{q_{O,2}}{r}\left[1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-1/2}\right)$$

Avec q_C la charge partielle du carbone, $q_{O,1}$ la charge partielle de l'oxygène en $z = d/2$ et $q_{O,2}$ la charge partielle de l'oxygène en $z = -d/2$.

3. En se plaçant à grande distance de la molécule, montrer que le potentiel électrostatique peut se réécrire :

$$V(M) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_C + q_{O,1} + q_{O,2}}{r} + \frac{q_{O,1} + q_{O,2}}{2r^2} d\cos\theta + (q_{O,1} + q_{O,2})d^2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{8r^3}\right)$$

On donne :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

4. Identifier le terme Coulombien, le terme dipolaire et le terme quadrupolaire.
5. Donner la relation liant q_C à q_O. Démontrer alors que la molécule de CO_2 n'a pas de moment dipolaire.

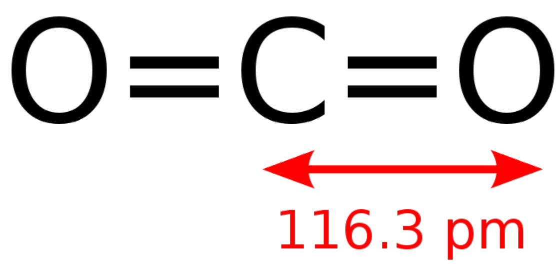


FIGURE 2 – La molécule de dioxyde de carbone