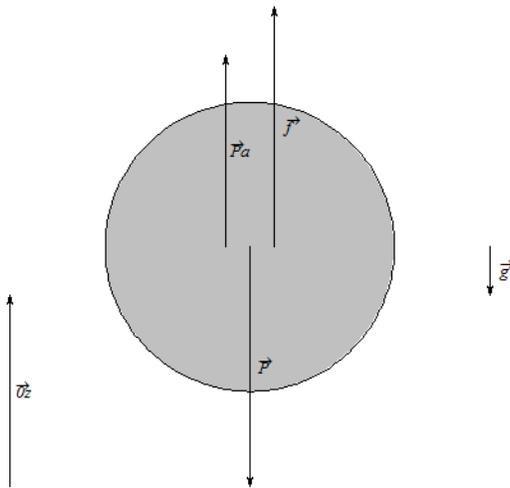


CHUTE D'UNE BILLE DANS UN FLUIDE

Ledig Jordan

Dernière modification 21.02.2015

Énoncé



On considère une bille repérée dans l'espace par le point M . Cette bille a un volume \mathcal{V} , et une masse volumique ρ . On plonge la bille dans un fluide de masse volumique ρ_e . Pour poser le problème, on définit l'axe Oz orienté vers le haut. On suppose que le système évolue dans un référentiel \mathcal{R} Galiléen.

Le schéma ci-contre résume le problème que l'on se propose de résoudre. On note \vec{P} le poids de la bille, \vec{P}_a la poussée d'Archimède et \vec{f} la force de frottement fluide, qui s'écrit $\vec{f} = -\eta\vec{v}$.

Nous supposons que le système a pour coordonnées initiales :

$$\begin{cases} z(t=0) = 0 \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Dans l'exercice, on notera :

$$\tau = \frac{\rho\mathcal{V}}{\eta} \quad \text{et} \quad \tilde{g} = g \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1 \right)$$

- 1) Écrire les composantes de \vec{P} , \vec{f} , et \vec{P}_a .
- 2) Écrire la deuxième loi de Newton en projetant les forces et le vecteur accélération sur l'axe Oz .
- 3) En effectuant un changement de variable, transformez cette équation différentielle d'ordre 2 en $z(t)$, pour vous ramener à une équation différentielle d'ordre 1 en $v_z(t)$. Montrer que l'on trouve :

$$\dot{v}_z(t) + \frac{1}{\tau}v_z(t) = \tilde{g} \quad (1)$$

- 4) Déterminer la dimension du paramètre τ , et donner une interprétation physique de \tilde{g} .
- 5) Déterminer la solution de l'équation homogène $v_{z,h}(t)$ de (1).
- 6) On suppose que la solution de l'équation inhomogène est $v_{z,i}(t) = \lambda = \text{Cte}$. Expliquer pourquoi, et calculer λ . Physiquement parlant, que représente λ ?
- 7) Montrez que la solution générale de (1) est :

$$v_z(t) = \tau\tilde{g} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

- 8) Montrez que l'on a :

$$z(t) = \tau^2\tilde{g} \left(e^{-t/\tau} - 1 \right) + \tau\tilde{g}t$$

- 9) Analyse des courbes, page suivante :
 - a) Que devient $v_z(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$?
 - b) Donner une interprétation physique du paramètre τ .
 - c) Quelle est la trajectoire du point M au bout d'un temps infini?
 - d) Comment varie la nature du mouvement en fonction du signe de \tilde{g} (3 cas possibles)?
 - e) Sur le troisième graphique, déterminer graphiquement la valeur de τ , la valeur de la vitesse limite, et le coefficient de frottements fluide η , si on a une bille de densité $d = 0.5$, et de rayon 2 cm.

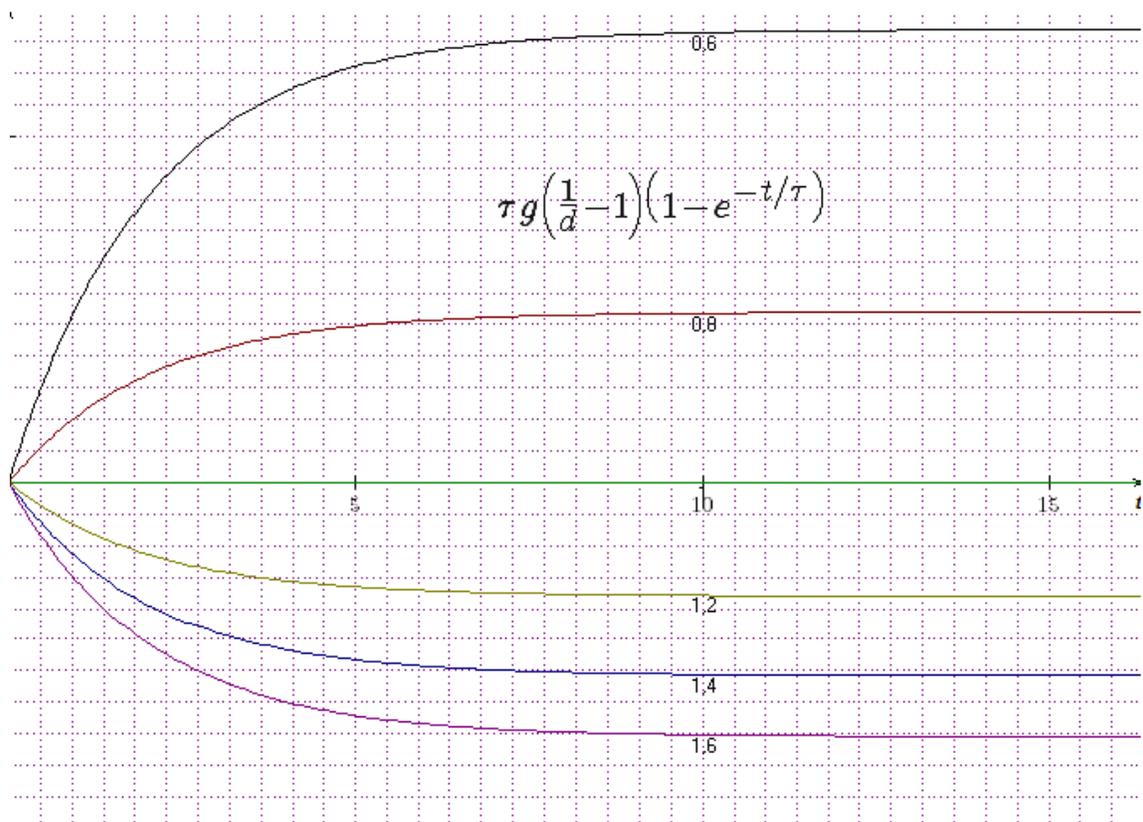


FIGURE 1 – Vitesse du point M pour $\tau=2$ et pour différentes valeurs de densité.

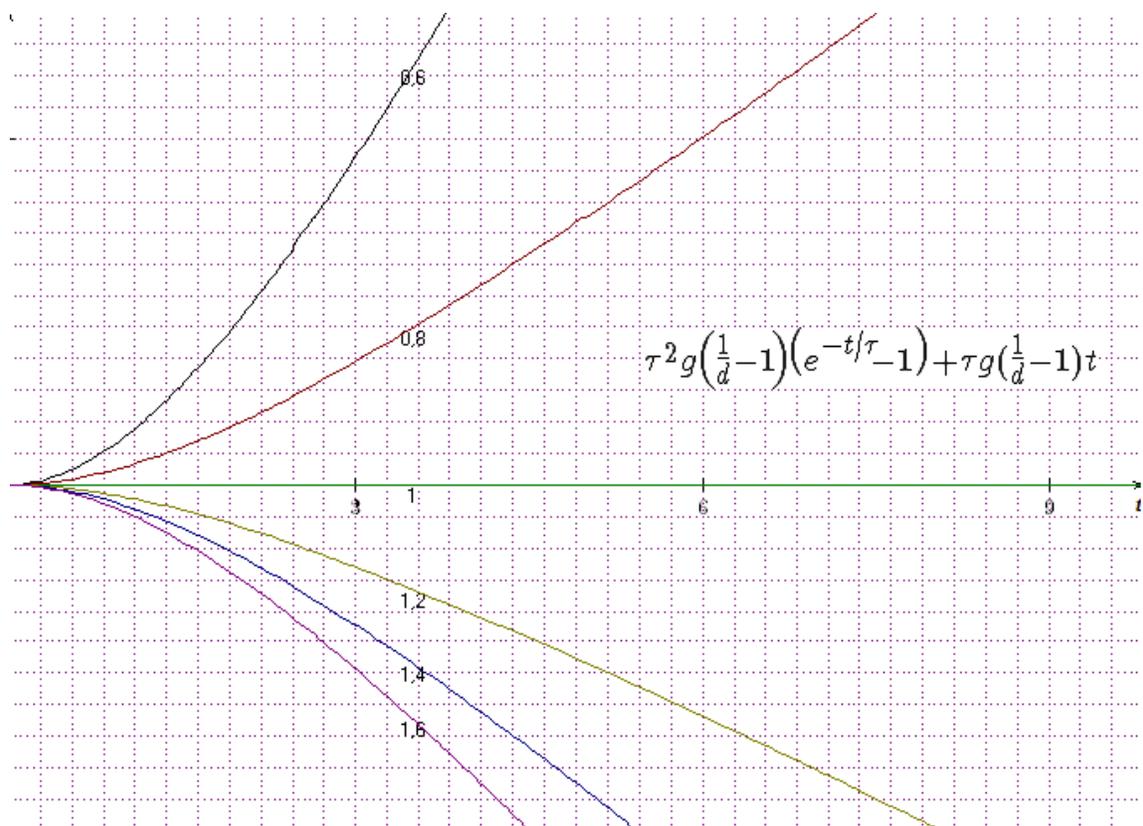


FIGURE 2 – Trajectoire horaire du point M pour $\tau=2$ et pour différentes valeurs de densité.

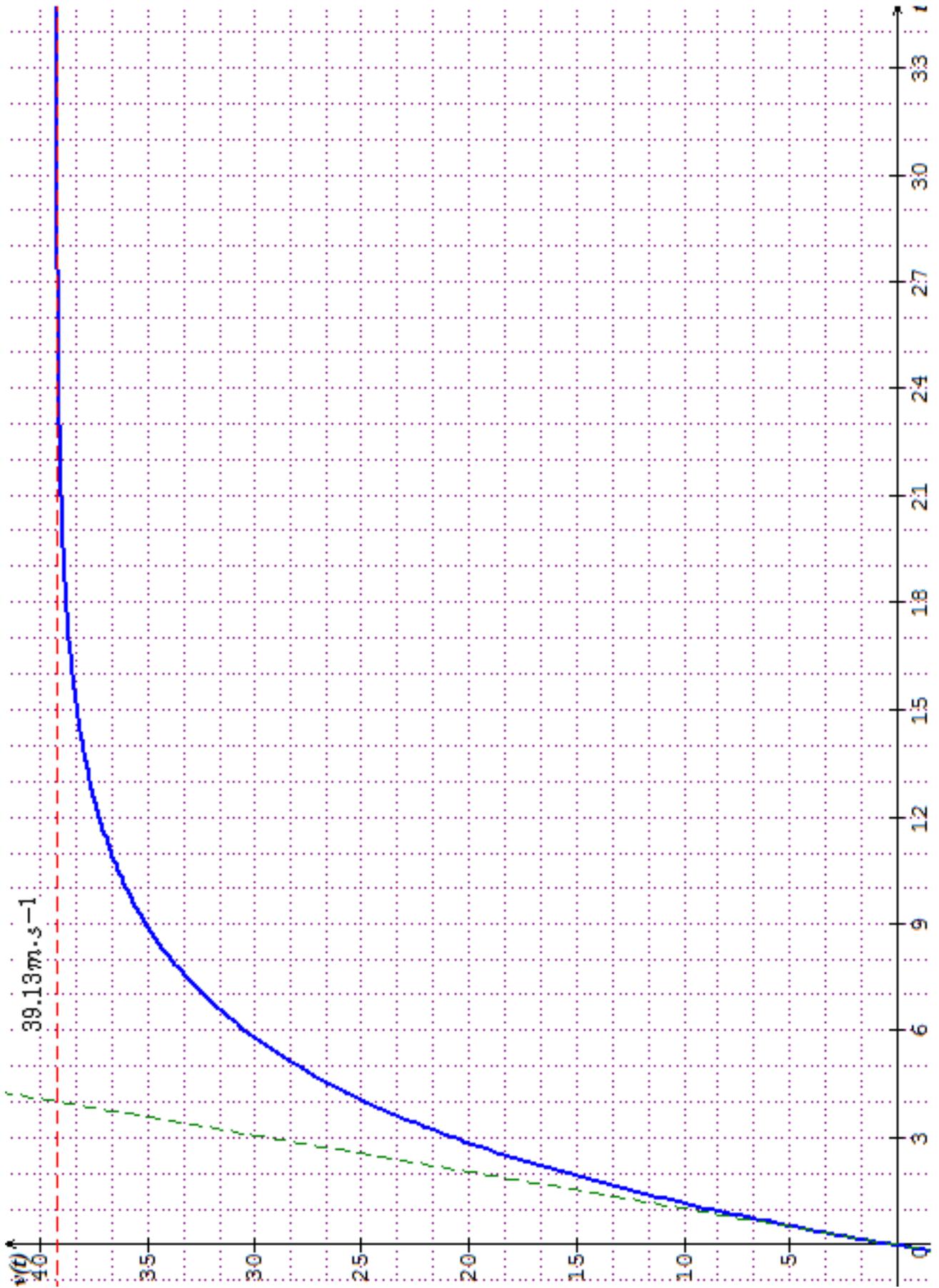


FIGURE 3 – Vitesse du point M pour $d = 0,5$ et $R = 2$ cm.