Mécanique Newtonienne

Tutorat de physique

06.01.2015

1 Dynamique du plasma dans un Tokamak

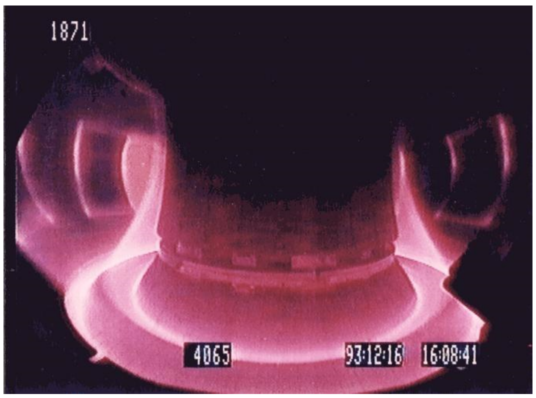

Figure 1 – Plasma dans un tokamak

Le futur réacteur expérimental d'ITER sera composé d'un tore, appelé Tokamak (un gros donut)dans lequel se trouvera du plasma (un gaz ionisé) d'un mélange de Deutérium et de Tritium (voir figure 1, ci-contre). Le plasma est mis en mouvement grâce à un fort champ magnétique axial (voir figure 2). Une bonne approximation, serait de considérer que le tore est un cylindre rectiligne infini, d'axe Oz. Le champ magnétique généré par le dispositif a cette forme : $\vec{B} = B_0\ \vec{e}_z$ où $B_0 = \mu_0 n I$ (μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, I l'intensité du courant qui génère le champ magnétique et n le nombre de bobines, par unité de longueur, qui entourent le tore). On considère un ion dans ce plasma, de charge $q > 0$; et repéré par le vecteur $\vec{r}(t)$. Le but de cet exercice est de calculer la trajectoire de cette particule dans le cylindre.

Note : pour que la réaction ai lieu, il faut que le plasma soit porté à plus de 100 MK ! Et le plasma est un milieu physique très instable. Ces deux facteurs rendent la fusion très compliquée à maitriser.

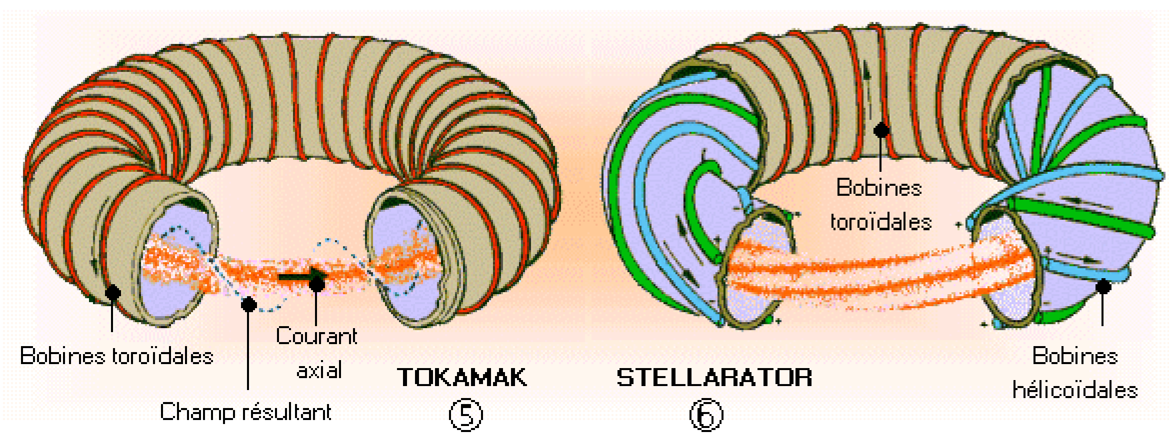

Figure 2 – Anatomie du Tokamak

Pour modéliser les interactions ions–ions, on introduit un terme de frottements représenté par une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$ (où $\vec{v} = d\vec{r}/dt$). On prend comme conditions initiales $\vec{r}(t=0) = (x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{v}(t=0) = (v_{0,x}, 0, v_{0,z})$. Et dès que possible, on posera (par commodité de calculs) :

$$\tau = \frac{m}{k} \qquad \text{et} \qquad \omega^2 = \frac{qB}{m} \qquad \text{et on donne} \quad \vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Questions

1. Faire le bilan des forces s'appliquant sur l'ion, et appliquer la deuxième loi de Newton (on néglige le poids, et on développera les équations dans le système de coordonnées cartésiennes). Montrer que l'on a :

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}\dot{x}(t) + \omega\dot{y}(t) \ \text{ sur } \vec{e}_x, \ \ \ddot{y}(t) = -\frac{1}{\tau}\dot{y}(t) - \omega\dot{x}(t) \ \text{ sur } \vec{e}_y \ \text{ et } \ \ddot{z}(t) = -\frac{1}{\tau}\dot{z}(t) \ \text{ sur } \vec{e}_z$$

2. En effectuant le changent de variable $v_z = \dot{z}$, résoudre la troisième équation différentielle, et montrer que l'on trouve finalement $z(t) = z_0 + v_{0,z}\tau(1 - \exp[-t/\tau])$.

3. Il nous reste maintenant les équations (1) et (2) :

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\omega}\left(\ddot{x}(t) + \frac{\dot{x}(t)}{\tau}\right) \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\omega}\left(\ddot{y}(t) + \frac{\dot{y}(t)}{\tau}\right) \tag{2}$$

Ceux sont des équations couplées. Pour rendre le problème soluble, nous allons dériver (2) par rapport au temps et l'injecter dans (1) (i.e. : dans (1), on remplace $\dot{x}$ par (2), et $\ddot{x}$ par la dérivée de (2) par rapport à t). Montrer que l'on trouve l'équation suivante :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{2}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{3}$$

4. Résoudre [1] (3) en procédant au changement de variable : $\dot{y}(t) = v_y(t)$.

5. En utilisant l'équation (2), montrez que l'on trouve :

$$\dot{x}(t) = Ae^{-t/\tau}\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{sachant que l'on avait} \qquad \dot{y}(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$$

6. Pour déterminer la constante φ, il faut utiliser les conditions initiales pour les vitesses. Montrer [2] que $\varphi = \pi/2$, puis réécrire $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sachant que $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ et que $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

7. Pour déterminer la constant A, on peut remarquer que $A^2 = v_x^2 + v_y^2$ pour $t = 0$.

8. Nous avons les vitesses selon x et selon y. Pour déterminer les positions, il nous faut donc intégrer $v_x(t)$ et $v_y(t)$. Pour cela, montrer tout d'abord que [3] :

$$\int \cos(bx)e^{ax}\,dx = \frac{a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2 + b^2}e^{ax} + K \quad \text{et} \quad \int \sin(bx)e^{ax}\,dx = \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2 + b^2}e^{ax} + L$$

Appliquer ces résultats à notre problème pour déterminer $x(t)$ et $y(t)$.

9. On note K la constante d'intégration de $x(t)$, et L la constante d'intégration de $y(t)$. En se référent aux conditions initiales sur $\vec{r}(t = 0)$, montrer que :

$$K = x_0 + \frac{\tau v_{o,x}}{1 + \omega^2\tau^2} \qquad \text{et} \qquad L = y_0 - \frac{\omega\tau^2 v_{o,x}}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Nous obtenons donc l'équation horaire du mouvement de l'ion dans le champ magnétique uniforme :

$$\begin{cases} x(t) &=& \dfrac{\tau v_{o,x}}{1 + \tau^2\omega^2}\left(1 + [\omega\tau\sin(\omega t) - \cos(\omega t)]e^{-t/\tau}\right) + x_0 \\ y(t) &=& \dfrac{\tau v_{o,x}}{1 + \tau^2\omega^2}\left([\sin(\omega t) + \omega\tau\cos(\omega t)]e^{-t/\tau} - \omega\tau\right) + y_0 \\ z(t) &=& v_{o,z}\tau(1 - e^{-t/\tau}) + z_0 \end{cases}$$

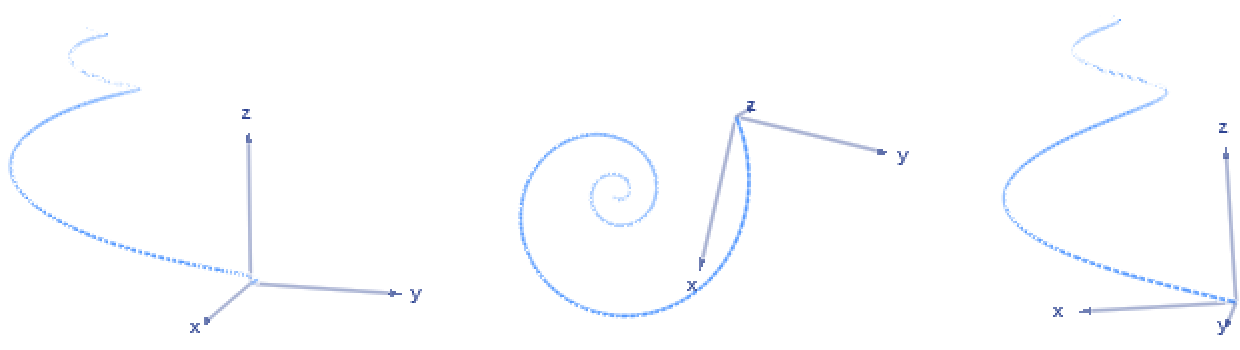

FIGURE 3 – Trajectoire hélicoïdale de la particule. On remarque que la particule fait une spirale logarithmique.

1. Pour résoudre une équation d'ordre 2 du type $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, on cherche les solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ avec la méthode du discriminant. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors on obtient un solution de la forme $r = \alpha \pm i\beta$. Et donc $y(x) = A\exp(\alpha t)\cos(\beta t + \varphi)$, où A et φ sont des constantes d'intégrations ; à déterminer avec les conditions initiales.
2. Pour ce faire, utiliser le fait que $\tan(\pi/2) \to +\infty$.
3. Utiliser un double intégration par parties.

2 Le ressort vertical

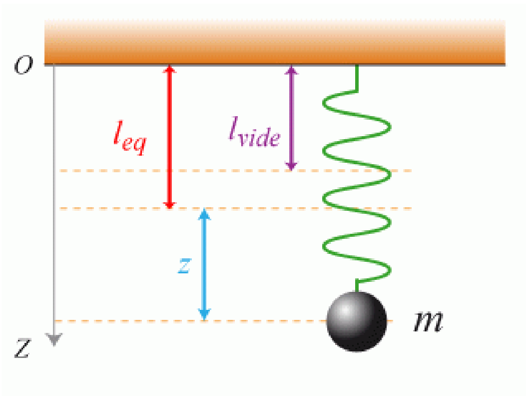

Figure 4 – Système physique considéré

On considère un ressort de constante de raideur k auquel on a accroché un objet M de masse m. On note ℓ_e la longueur du ressort à l'équilibre, et l_v la longueur du ressort à vide. On prend comme convention $\vec{g} = g\,\vec{e}_z$.

1. Expliquer le signe de $\vec{F} = -k(\ell - \ell_v)\vec{e}_z$, la force de rappelle du ressort, et donner la dimension de la constante k.

2. Faire le bilan des forces. Écrire la condition d'équilibre, et donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de m, k et g.

3. On note $z(t) = \ell(t) - \ell_e$, l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre. Écrire la deuxième loi de Newton, et montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) = 0 \qquad (4)$$

4. On déplace la masse M par rapport à sa position d'équilibre tel que $z(t = 0) = Z_0$, et on le lâche sans lui communiquer de vitesse initiale. Résolvez l'équation (4), et montrer que l'on trouve :

$$z(t) = Z_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \qquad (5)$$

5. Donner la dimension du terme $\sqrt{k/m}$, et donner son interprétation physique. Dessiner l'allure de la courbe de $z(t)$. Déterminer la période T des oscillations de ce pendule.

6. Calculer l'énergie potentielle totale (énergie potentielle élastique et énergie potentielle de pesanteur) ainsi que l'énergie cinétique du système considéré. En déduire l'énergie mécanique du système $E(t)$ en utilisant l'équation (5). Montrer que l'énergie (mécanique) du système se conserve.

7. En écrivant E en fonction de z uniquement (sans faire apparaitre t dans l'expression), montrer que l'on peut retrouver la seconde loi de Newton appliquée au ressort.

3 Le ressort avec frottements

On plonge le même système que l'exercice 2 dans un fluide on introduit donc des frottements : $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$ (on néglige la poussé d'Archimède).

1. Faire le bilan des forces qui agissent sur la masse M à l'équilibre. Faire le bilan des forces hors–équilibre, et montrer qu'en posant $m/\gamma = \tau/2$ et $k/m = \omega_0^2$ on trouve l'équation différentielle suivante (toujours pour $z(t) = \ell(t) - \ell_e$) :

$$\ddot{z}(t) + \frac{2}{\tau}\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0 \qquad (6)$$

2. Pour résoudre cette équation d'ordre 2, on va commencer par calculer les racines du polynôme caractéristique [4]. On identifie donc 3 cas en fonction du signe du discriminant Δ :

   (a) $\Delta < 0$: montrer que ce cas satisfait à la condition $\omega_0 > 1/\tau$. En posant $-\Omega^2 = 1/\tau^2 - \omega_0^2$, montrer que la solution de l'équation différentielle (6) est : $z(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi)$. Déterminer les constantes d'intégrations en fonction des données du problème. Dessiner la courbe de z en fonction de t.

   (b) $\Delta > 0$: montrer que ce cas satisfait à la condition $\omega_0 < 1/\tau$. En posant $\Gamma^2 = 1/\tau^2 - \omega_0^2$, montrer que la solution de l'équation différentielle (6) est : $z(t) = e^{-t/\tau}(A\exp[-\Gamma t] + B\exp[\Gamma t])$. Déterminer les constantes d'intégrations en fonction des données du problème. Dessiner la courbe de z en fonction de t.

   (c) $\Delta = 0$: montrer que ce cas satisfait à la condition $\omega_0 = 1/\tau$. Montrer que la solution de l'équation différentielle (6) est : $z(t) = (A + Bt)e^{-t/\tau}$. Déterminer les constantes d'intégrations en fonction des données du problème. Dessiner la courbe de z en fonction de t.

4. On rappelle que pour équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$, l'équation caractéristique est $ar^2 + br + c = 0$, et les racines sont les solutions (réelles ou complexes) de l'équation caractéristique.

4 Pendule plan

On considère un pendule libre de se déplacer dans le plan Oxy. Le point d'attache de ce pendule est en O, et on oriente l'axe des x vers le bas, tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$. Le pendule a une tige rigide de longueur ℓ constante ; et au bout de cette tige, on a une masse M. On néglige les forces de frottements et la masse de la tige.

On défini un angle $\theta = \left(\vec{e}_x, \overrightarrow{OM}\right)$, l'ange le de la base polaire. On considère que au temps $t = 0$, on a $\theta(0) = \Theta_0$, et $\dot{\theta}(0) = 0$.

1. Faire le bilan des forces dans la base polaire, et appliquer la deuxième loi de Newton (on note P le poids, et T la tension du fil).

2. Montrer que la projection du PFD sur $\vec{e}_\theta$ donne :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{7}$$

3. Pourquoi (7) n'est pas soluble ?

4. En supposant que $\theta \to 0$, pourquoi peut-on approximer $\sin\theta \sim \theta$?

5. Donner la solution de (7) en utilisant l'approximation. Et montrer que l'on a :

$$\theta(t) = \Theta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right) \tag{8}$$

6. Calculer l'énergie cinétique du pendule, et son énergie potentielle, et montrer que l'énergie totale du système est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) \tag{9}$$

Où on a prit $E_p = 0$ pour $\theta = 0$.

7. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'on peut retrouver (7) en partant de (9).

8. En utilisant la projection du PFD sur le vecteur de base, montrer que :

$$T = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \tag{10}$$

9. Montrer que dans notre cas $E = mg\ell(1 - \cos\Theta_0)$.

10. En utilisant la valeur de l'énergie déterminée dans la question précédente, déterminer la valeur de $\dot{\theta}^2$; puis montrer (en utilisant la relation (10)) que :

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\Theta_0) \tag{11}$$

Rappels :
Soit une équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$. Si nous calculons le discriminant, on retrouve 3 cas :

- $\Delta > 0$, alors les racines du polynôme caractéristique sont de la forme $r_\pm = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$. Donc la solution de l'équation différentielle s'écrit : $Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$.

- $\Delta = 0$, alors la racine du polynôme caractéristique est de la forme $r = -b/2a$. Donc la solution de l'équation différentielle s'écrit : $(A + Bt)e^{rt}$.

- $\Delta < 0$, alors les racines du polynôme caractéristique sont de la forme $r_\pm = (-b \pm\ i\sqrt{\Delta})/2a = \alpha \pm i\beta$. Donc la solution de l'équation différentielle s'écrit : $Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)$.