

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES COUPLÉES

LEDIG Jordan

Dernière modification 22.08.2015

Introduction

Dans ce petit cours, nous allons voir *comment résoudre un système de n équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants* :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{1,1}y_1(t) + a_{1,2}y_2(t) + \cdots + a_{1,n-1}y_{n-1}(t) + a_{1,n}y_n(t) \\ \dot{y}_2(t) = a_{2,1}y_1(t) + a_{2,2}y_2(t) + \cdots + a_{2,n-1}y_{n-1}(t) + a_{2,n}y_n(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = a_{n,1}y_1(t) + a_{n,2}y_2(t) + \cdots + a_{n,n-1}y_{n-1}(t) + a_{n,n}y_n(t) \end{cases}$$

en se ramenant à la résolution de l'équation aux valeurs propres de la matrice A générée par l'ensemble des coefficients $a_{i,j}$:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

En effet, dans ce cas le système se rapporte à un système vectoriel : $\vec{Y}'(t) = A\vec{Y}(t)$ de telle sorte que les composantes du vecteur \vec{Y} soient l'ensemble des fonctions $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t), y_n(t))$. Dans ce cours, nous allons nous appuyer sur les résultats énoncés par les théorème de l'algèbre linéaire (il n'y aura donc pas de démonstration purement mathématique).

Contenu du cours

1	Pré-requis	3
1.1	Résolution d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants	3
1.2	Bases du calcul matriciel	3
1.2.1	Déterminant	3
1.2.2	Matrice des cofacteurs	4
1.2.3	Transposée d'une matrice	5
1.2.4	Inverse d'une matrice	5
1.2.5	Produit matriciel	6
2	Équation aux valeurs propres	7
2.1	Vecteurs, valeurs et espace propre d'une matrice	7
2.2	Résolution de l'équation aux valeurs propre	7
2.3	Matrices diagonale et matrice de passage	8
2.4	Résumé et application	9

3	Utilisation à la résolution d'équations différentielles	10
3.1	Utilité d'avoir une base propre	10
3.2	Exemples de résolutions d'équations différentielles couplées	10
3.2.1	La décroissance radioactive à 2 corps	10
3.2.2	Cas d'une matrice nilpotente	12
3.2.3	Cas de valeurs propres complexes	14
3.2.4	Cas d'un second membre non nul	15
3.2.5	Cas d'une matrice 3×3	16

1 Pré-requis

1.1 Résolution d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants

Considérons le cas classique (sans matrice) d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants ; soit à résoudre¹ l'équation différentielle avec second membre :

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t) \quad \text{tel que } y(t = t_0) = y_0$$

On va d'abord chercher à résoudre l'équation homogène (c'est à dire le cas où $f(t) = 0$) : $\dot{y}_h(t) = Ay_h(t)$. La solution homogène est donc :

$$y_h(t) = \alpha e^{At}$$

où α est une constante d'intégration. Afin de trouver la solution particulière $y_p(t)$, nous allons utiliser la méthode de la variation de la constante en faisant dépendre α du temps t : $\alpha \rightarrow \alpha(t)$. Puis en injectant cette nouvelle fonction dans l'équation différentielle avec second membre, on trouve :

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)e^{At}) = A\alpha(t)e^{At} + f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\alpha}(t)e^{At} + A\alpha(t)e^{At} = A\alpha(t)e^{At} + f(t)$$

soit finalement :

$$\dot{\alpha}(t) = f(t)e^{-At} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(t) = \int_0^t f(x)e^{-Ax} dx$$

D'où la solution spécifique :

$$y_p(t) = \alpha e^{At} = \int_0^t f(x)e^{A(t-x)} dx$$

Et donc la solution du problème est la somme des deux solutions $y_p(t)$ et $y_h(t)$:

$$y(t) = \alpha e^{At} + \int_0^t f(x)e^{A(t-x)} dx$$

Une fois que l'on a l'écriture exacte de $y(t)$, il suffit de prendre la condition à t_0 de $y(t_0) = y_0$ pour déterminer l'expression de la constante α (qui cette fois ne dépend pas du temps).

1.2 Bases du calcul matriciel

Dans ce cours, il nous sera utile de calculer des produits matriciels et des inverses de matrices. Il faut donc s'assurer de pouvoir maîtriser ces outils avant de passer à la section 2.

Dans tout ce qui suit, on ne considérera que des matrices carrées ; c'est à dire, des matrices ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonne. Ainsi, on parle de matrice de dimension n si elle a n lignes et n colonnes.

1.2.1 Déterminant

Le déterminant est un scalaire : c'est une sorte de "norme matricielle"². Pour calculer un déterminant, il faut connaître la dimension de la matrice : le déterminant ne peut être calculé que pour des matrices carrées. De plus la méthode varie en fonction de la dimension. Pour une matrice de dimension $n = 2$, le calcul du déterminant est assez simple, et utilise la règle du " γ " :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1. Pour plus de détails, lire le cours sur la résolution d'équations différentielles d'ordre 1 et 2 du site.
2. Cette définition n'est pas officielle, mais c'est comme cela que je vois les choses.

Pour une matrice de dimension $n = 3$, on fait la règle du gamma pour toutes les diagonales (on appelle cette méthode, la méthode dite de *Sarrus*) :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (gec + hfa + ibd)$$

Pour une matrice de dimension $n > 3$, il faut se ramener à une somme de déterminants de dimension $n = 3$ afin d'utiliser la méthode de *Sarrus*. Pour cela on utilise la décomposition suivante :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{=-1} b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + \dots + \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=1} d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

On appelle cette méthode : "développer par rapport à une ligne : le premier terme, c'est l'élément de matrice $a_{1,1} = a$, multiplié par sa signature $(-1)^{1+1} = 1$, multiplié par le déterminant de la matrice A si on retire la ligne 1 et la colonne 1. Le second terme, c'est l'élément de matrice $a_{1,2} = b$ multiplié par sa signature $(-1)^{1+2} = -1$, multiplié par le déterminant de la matrice A si on retire la ligne 1 et la colonne 2; et ainsi de suite. Ici, on a développé par rapport à la ligne 1. On aurait pu le faire avec n'importe quelle ligne, ou n'importe quelle colonne (dans ce cas, on aurait développé par rapport à une colonne).

En fait cette méthode est applicable à toutes les dimensions (même pour $n = 2$ ou $n = 3$). De plus, cette méthode est très pratique s'il y a des 0 dans la matrice :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{vmatrix} = \begin{cases} a \begin{vmatrix} d & e \\ f & g \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & e \\ 0 & g \end{vmatrix} \\ a \begin{vmatrix} d & e \\ f & g \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} b & 0 \\ f & g \end{vmatrix} \end{cases}$$

Dernière propriété du déterminant : il est possible d'ajouter ou de soustraire les lignes entre elles, ou les colonnes entre elles (afin de faire apparaître des 0, par exemple).

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} \stackrel{\underbrace{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} \stackrel{\underbrace{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 32$$

? Exercice 1 : Calculs de déterminants

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 27 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Matrice des cofacteurs

La matrice des cofacteurs de la matrice A se note simplement \tilde{A} (se dit "*A-tilde*"). Nous allons ici nous limiter aux matrices de dimensions 3 et 2. Pour calculer la matrice des cofacteurs, on va utiliser la même

méthode que pour le calcul du déterminant : l'élément de matrice $\tilde{a}_{i,j}$, c'est le déterminant de la matrice A si on enlève la ligne i et la colonne j , multiplié par la signature de l'élément de matrice $a_{i,j}$, $(-1)^{i+j}$:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ on trouve donc } \tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice de dimension 2, les déterminants se limitent aux éléments de matrices. Ainsi, on obtient aisément :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

1.2.3 Transposée d'une matrice

C'est une définition très simple, si on a une matrice carrée de dimension n et d'éléments $a_{i,j}$, alors sa transposée aura comme élément de matrice $a_{i,j}^T = a_{j,i}$. En d'autres mots, la matrice transposée de A est la matrice symétrique de A si on prend la diagonale comme axe de symétrie (la diagonale reste donc invariante) :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

1.2.4 Inverse d'une matrice

Pour calculer l'inverse d'une matrice, il faut appliquer la formule de LAPLACE :

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det A}$$

où \tilde{A}^T est la matrice transposée de la matrice des cofacteurs de A , et $\det A$ est le déterminant de A . Nous voyons qu'une matrice est inversible (i.e. A^{-1} existe) si et seulement si $\det A \neq 0$. Par ailleurs, nous remarquons qu'en appliquant la formule pour une matrice carrée quelconque, de dimension 2, nous trouvons que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

? Exercice 2 : Inversions de matrices

- Démontrer la formule précédente (l'inverse d'une matrice de dimension 2) en appliquant la formule de LAPLACE sur une matrice carrée quelconque.
- On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 0 & \lambda_A & 2 \\ -1 & -3 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_B & 2 \\ 1 & 1 - \lambda_B \end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de λ ces matrices sont-elles inversibles ?

- Calculer A^{-1} et B^{-1} pour $\lambda_A = 1$ et $\lambda_B = -1$.

1.2.5 Produit matriciel

Pour finir cette section, il faut parler du produit matriciel. On considère cette fois, deux matrices A et B de dimensions (i, j) et (m, n) (respectivement). Le produit matriciel $A \times B = C$ est possible si et seulement si $j = m$ (c'est à dire, si A a autant de colonnes que B a de lignes); et la matrice C aura comme dimension (i, n) . En d'autres termes, pour des matrices carrées, le produit matriciel n'est possible que si les deux matrices ont la même dimension.

Si on note $x_{\mu,\nu}$ les éléments de la matrice X , alors le produit matriciel $A \times B = C$ nous donnera :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}$$

Prenons un exemple simple : on considère une matrice A de dimension $(2,3)$ et une matrice B de dimension $(3,2)$. Nous voyons que le produit matriciel $A \times B$ est possible (mais pas le produit $B \times A$; d'ailleurs presque dans tous les cas $A \times B \neq B \times A$). Ainsi le produit AB donnera une matrice carrée de dimension 2 :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag + bi + ck & ah + bj + cl \\ dg + ei + fk & dh + ej + fl \end{pmatrix}$$

Autre exemple : considérons deux matrices carrées de dimension 3 :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak + bn + cq & al + bo + cr & am + bp + cs \\ dk + en + fq & dl + eo + fr & dm + ep + fs \\ gk + in + jq & gl + io + jr & gm + ip + js \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Produits matriciels

1. Calculer les produits suivants, et montrer que $AB \neq BA$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On appelle MATRICE IDENTITÉE de dimension n la matrice suivante :

$$n = 1 \Rightarrow I_1 = 1 \quad n = 2 \Rightarrow I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n = 3 \Rightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour une matrice carrée quelconque de dimension n , vérifier que $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$. Pour cela on prendra :

- (a) Le couple suivant pour $n = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- (b) Le couple suivant pour $n = 3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -10 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2 Équation aux valeurs propres

Dans ce cours, on va devoir calculer l'exponentielle d'une matrice : $\exp A$. Mais cela n'est possible directement que pour des matrices diagonales (des zéros partout, sauf sur la diagonale) :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \exp A = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$$

Pour les autres matrices, il va falloir résoudre l'équation aux valeurs propre de la matrice afin de la diagonaliser. C'est cet algorithme que nous allons exposer ici.

2.1 Vecteurs, valeurs et espace propre d'une matrice

On note H une matrice carrée de dimension quelconque. Ses valeurs propres sont notées h , ses vecteurs propres sont notés $|\psi\rangle$, et \mathcal{E} est son espace propre. L'équation aux valeurs propre s'écrit :

$$H|\psi\rangle = h|\psi\rangle$$

Cette notation semble un peu compliquée, mais si elle vous pose problème, vous pouvez la voir plutôt comme ceci : $H\vec{\psi} = h\vec{\psi}$. Je préfère travailler avec la notation de Dirac, car celle-ci fonctionne aussi si on a non pas des vecteurs propres, mais des fonctions propres.

H peut avoir plusieurs vecteurs propres (plusieurs vecteurs solution de l'équation aux valeurs propres). On peut donc définir un ensemble de k vecteurs $\{|\psi_k\rangle\}$, tel que :

$$H|\psi_k\rangle = h|\psi_k\rangle \quad \forall k$$

Cet ensemble de de k vecteurs propre définit une base propre de dimension k , notée \mathcal{E} . Et dans cette base, la matrice H est diagonale. En fait, il faut voir ça comme un changement de coordonnées : dans l'espace cartésien \mathcal{C} défini par $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$, un point peut être repéré par le vecteur $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$; alors que dans l'espace polaire \mathcal{P} défini par $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$, le vecteur position se note $\vec{r} = r\vec{e}_r$. On voit que l'expression de \vec{r} est plus simple dans \mathcal{P} que dans \mathcal{C} . C'est la même idée pour l'espace propre \mathcal{E} : on cherche à diagonaliser (donc à simplifier) la matrice H .

2.2 Résolution de l'équation aux valeurs propre

On considère maintenant une matrice carrée H de dimension n . Son équation aux valeurs propres s'écrit :

$$H|\psi\rangle = h|\psi\rangle$$

Se qui peut également se réécrire :

$$(H - h \times I_n)|\psi\rangle = 0$$

Cette équation vectorielle a deux solutions : soit $|\psi\rangle = 0$, soit $H - hI_n = 0$. La première solution est une solution dite "*triviale*", et ne nous intéresse pas. Pour *forcer* l'équation à nous donner que les solutions non-triviales, il faut résoudre :

$$\det(H - hI_n) = 0 \quad \text{où } h \text{ est l'inconnue} \quad (2-A)$$

La quantité $\det(H - hI_n)$ est le polynôme caractéristique de la matrice H , et se note généralement $P_H(h)$. Notons aussi que l'ensemble des racines de ce polynôme (i.e. tous les h solutions de (2-A)) définissent le spectre de H , noté $\sigma_H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$.

Une fois qu'on a trouvé les n valeurs propres de H , il faut trouver les n vecteurs propres associés. Pour cela, il faut résoudre l'équation suivante :

$$(H - h_k I_n)|\psi_k\rangle = 0 \quad \text{pour } k \text{ allant de } 1 \text{ à } n \quad (2-B)$$

Traitons un exemple : on considère la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de H est donc :

$$P_H(h) = \begin{vmatrix} 1-h & 0 \\ 4 & 2-h \end{vmatrix} = (1-h)(2-h)$$

Les solutions de $P_H(h) = 0$ sont alors $h_1 = 1$ et $h_2 = 2$. Déterminons le premier vecteur propre :

$$\begin{pmatrix} 1-h_1 & 0 \\ 4 & 2-h_1 \end{pmatrix} |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

En sachant que le produit d'une matrice de dimension n avec un vecteur se calcule comme le produit d'une matrice avec une autre matrice de dimension $(n, 1)$, ce système fournit l'équation $4x_1 + y_1 = 0$ ce qui nous donne un vecteur propre :

$$|\psi_1\rangle = y_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même pour la valeur propre $h_2 = 2$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 1-h_2 & 0 \\ 4 & 2-h_2 \end{pmatrix} |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Un vecteur solution de ce système est le vecteur suivant :

$$|\psi_2\rangle = y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut définir l'espace propre de la matrice H :

$$\mathcal{E} = \left\{ |\psi\rangle \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |\psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \right\}$$

2.3 Matrices diagonale et matrice de passage

Dans cette sous-section, on s'appuiera sur l'exemple précédent : on utilisera la matrice H de spectre $\sigma = \{1, 2\}$ et de vecteurs propres $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. La matrice diagonale de H est donnée par la matrice :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux écritures de D sont équivalentes. D est la représentation de H dans la base propre \mathcal{E} de H .

Pour bien comprendre la notion de matrice diagonale, on peut utiliser un exemple tiré de la mécanique : le pendule plan. La tension du fil est donnée par la relation vectorielle $\vec{T} = -T \cos \theta \vec{e}_x - T \sin \theta \vec{e}_y$ dans la base cartésienne (c'est l'équivalent de H), alors que dans la base polaire, on a $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ (c'est l'équivalent de D). L'écriture dans la base polaires est bien plus simple que celle dans la base cartésienne. On peut dire que la base polaire est une sorte de base propre du vecteur \vec{T} .

Maintenant que l'on a défini la matrice diagonale D , on peut définir la matrice de passage P . Cette matrice est construite à l'aide des vecteurs propres de H : c'est simplement la juxtaposition des vecteurs propres (en écriture colonne) dans l'ordre où on a placé les valeurs propres associées dans D . Ainsi les matrices de passage P_1 et P_2 s'écrivent simplement :

$$P_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices P sont les matrices qui permettent de passer d'une base à l'autre de telle sorte à ce que :

$$\boxed{H = PDP^{-1}}$$

2.4 Résumé et application

L'essentiel de la méthode

On considère une matrice H carrée quelconque de dimension n . Pour trouver sa représentation diagonale, il faut tout d'abord **résoudre l'équation aux valeurs propres** :

$$H|\psi\rangle = h|\psi\rangle$$

avec h la valeur propre associée au vecteur propre $|\psi\rangle$ de H .

Pour trouver les **valeurs propres** de H il faut résoudre le système suivant :

$$\det(H - h \times I_n) = 0$$

avec I_n la matrice identité de dimension n . L'ensemble des valeurs propres de H se note σ , le spectre de H . Pour trouver les **vecteurs propres** de H , il faut résoudre le système :

$$(H - h \times I_n)|\psi\rangle = 0$$

avec $|\psi\rangle$ un vecteur colonne ayant n composantes x_1, \dots, x_n (le but du calcul étant de déterminer tous les x_i). **Il faut faire ce calcul pour toutes les valeurs propres.**

On peut maintenant calculer la **matrice diagonale** D et la **matrice de passage** P de H . Pour écrire D il suffit d'écrire les valeurs propres sur une diagonale d'une matrice diagonale ^a de dimension n . Pour écrire P , **il faut écrire dans chaque colonne d'une matrice le vecteur propre** (en écriture colonne) **associé à chaque valeur propre** de D ^b.

La **relation de passage** entre H et D est : $H = PDP^{-1}$

a. c'est une matrice avec des zéros partout, sauf sur la diagonale

b. si dans la colonne 1 de D on a la valeur propre h_5 , alors dans la première colonne de P on aura le vecteur propre $|\psi_5\rangle$

Exercice 4 : Application directe

On note H la matrice 2×2 suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de H , et montrer que son spectre est $\sigma_H = \{-1, 5\}$.
2. Calculer les vecteurs propres de H , et montrer que l'on trouve pour matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Vérifier la relation de passage $H = PDP^{-1}$.

Mêmes question pour la matrice H suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{montrer que} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Utilisation à la résolution d'équations différentielles

3.1 Utilité d'avoir une base propre

Dans la dernière section, on a vu qu'une matrice se mettait sous forme diagonale lorsqu'on l'exprimait dans sa base propre. On peut maintenant exploiter cette technique car si on souhaite réaliser une opération sur une matrice, il suffit de faire cette opération sur sa forme diagonale, puis, repasser dans la base usuelle. Ainsi, $H = PDP^{-1}$ entraîne $H^2 = PD^2P^{-1}$, ou $\sqrt{H} = P\sqrt{D}P^{-1}$, ou encore $\exp H = P \cdot \exp D \cdot P^{-1}$ (la liste est longue...).

Pour nous convaincre de la chose, faisons un exemple : reprenons la matrice de dimension 2 de l'exercice 4. Le carré de cette matrice est :

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$PD^2P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

Cet exemple est un peu inutile dans le sens où on n'a pas de soucis pour calculer le carré d'une matrice : on n'a pas besoin de passer par la forme diagonale. Cependant, pour les autres opérations tels que l'exponentiation ou la racine carrée, le passage dans la base propre est inévitable.

3.2 Exemples de résolutions d'équations différentielles couplées

3.2.1 La décroissance radioactive à 2 corps

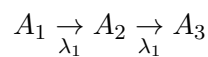
Nous allons utiliser un exemple tiré de la physique nucléaire : l'activité radioactive. Nous savons que le nombre d'atome radioactif d'un radio élément suit une loi exponentielle de la forme :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

où $N(t)$ est le nombre d'atomes radioactifs à l'instant t donné, N_0 est le nombre d'atomes radioactifs à l'instant initial et λ est la constante de désintégration propre au radio élément considéré.

En observant cette loi, il est facile de voir que $\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$. C'est une équation différentiel d'ordre 1 à coefficients constants. Sa résolution est triviale, et est exposée dans la fiche précédente (cours : résolution d'équations différentielles linaires).

Cependant, on peut rehausser le niveau en considérant une famille radioactive du type :



Avec A_1 l'atome père, A_2 l'atome fils et A_3 l'atome stable. Ce système physique vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) &= -\lambda_1 N_1(t) \\ \dot{N}_2(t) &= \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \\ \dot{N}_3(t) &= 0 + \lambda_2 N_2(t) \end{cases}$$

Les lignes étant découplées, on peut résoudre le problème, dans un premier temps, en ne s'attardant que sur les deux premières lignes :

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) &= -\lambda_1 N_1(t) \\ \dot{N}_2(t) &= \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \end{cases}$$

Ce qui peut se réécrire simplement sous forme vectorielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{d\vec{N}}{dt} = H \times \vec{N}$$

Pour résoudre intégralement le problème, on se pose comme condition initiale $N_{1,0} = N_0$ et $N_{2,0} = 0$. Ainsi, on peut écrire vectoriellement :

$$\vec{\mathcal{N}}_0 = \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant appliquer notre algorithme de résolution sur la matrice H . Calculons tous d'abord les valeurs propres en résolvant l'équation suivante :

$$\det(H - h \times I_2) = (h + \lambda_1) \cdot (h + \lambda_2) = 0$$

Les valeurs propres sont donc $h_1 = -\lambda_1$ et $h_2 = -\lambda_2$. Pour déterminer les vecteurs propres, nous devons vérifier que $(H - h_i \times I_2)|\psi_i\rangle = 0$. Pour $h_1 = -\lambda_1$, on trouve l'équation suivante :

$$\lambda_1 x_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$$

En posant $y_1 = 1$ (c'est un choix arbitraire qui ne change en rien le résultat : on peut choisir x_1 et y_1 comme on veut, tant que l'équation qui lie les deux est vérifiée) on trouve le premier vecteur propre :

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $h_2 = -\lambda_2$, nous trouvons deux équations qui nous donnent $x_2 = 0$. Ainsi, par choix on prendra $y_2 = \text{Cte} = 1$. Le second vecteur propre de H est donc :

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant que nous connaissons les valeurs propres et les vecteurs propres de H , nous pouvons écrire la matrice diagonale et la matrice de passage associée. On prendra donc par choix la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui implique} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de P étant

$$P^{-1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \end{pmatrix},$$

on peut écrire la relation de passage entre H et D . Cependant, ce n'est pas cette écriture là qui nous intéresse, mais celle qui nous permet de calculer l'exponentielle de H . En effet le système différentielle nous menait à l'équation suivante :

$$\frac{d\vec{\mathcal{N}}}{dt} = H \times \vec{\mathcal{N}}$$

Or si on applique le résultat énoncé dans la section 1.1 (résolution d'une équation d'ordre 1 à coeffs. constants, page 3) pour $f(t) = 0$ et pour $y(t) = \vec{\mathcal{N}}(t)$ avec $A = H$, on a :

$$\vec{\mathcal{N}}(t) = \exp(Ht) \cdot \vec{\mathcal{N}}_0$$

Ainsi en appliquant la relation de passage entre H et D , on arrive à déterminer l'exponentielle de la matrice H via l'exponentielle de la matrice D . Calculons le produit vectoriel $\exp(Ht) = P \cdot \exp(Dt) \cdot P^{-1}$.

$$\begin{aligned} \exp(Ht) &= P \cdot \exp(Dt) \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiales \vec{N}_0 , on arrive à déterminer la solution finale $\vec{N}(t)$:

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la solution analytique du problème est donc :

$$\begin{cases} N_1(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_1 t) \\ N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (\exp[-\lambda_1 t] - \exp[-\lambda_2 t]) \end{cases}$$

Remarque importante

Nous remarquons que le point fort de cette méthode est que l'on obtient directement toutes les solutions possibles, indépendamment des conditions initiales. En effet, la solution spécifique au problème énoncé est obtenue tout à la fin en effectuant un simple produit entre la matrice solution $\exp(Ht)$ et le vecteur des conditions initiales. La méthode classique de résolution nous oblige à résoudre une équation supplémentaire pour $t = 0$ afin de déterminer les constantes et ainsi la solution caractéristique.

3.2.2 Cas d'une matrice nilpotente

Une matrice A est dite nilpotente lorsqu'il existe un entier réel k tel que $A^n = 0 \forall n \geq k$. Prenons un exemple concret :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = O_3$$

avec O_3 la matrice nulle de dimension 3 (matrice carrée de dimension 3 ne contenant que des 0).

Si la matrice générée par un système différentiel est nilpotente, alors on peut simplifier l'algorithme de résolution en utilisant un développement en série de Taylor. Pour y voir plus clair, procédons à un exemple clair. On considère le problème suivant (qui n'a, à ma connaissance, aucune application physique) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + 9[y(t) - z(t)] \\ \dot{y}(t) = 2x(t) \\ \dot{z}(t) = 3[x(t) + y(t) - z(t)] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{S}}{dt} = A\vec{S}(t)$$

avec $\vec{S}(t)$ le vecteur contenant les solutions du problème.

Cette fois-ci, au lieu d'appliquer notre méthode avec les valeurs propres, on va utiliser l'expression générale de la solution, $\vec{S}(t) = \exp(At) \cdot \vec{S}(0)$, et le fait que la matrice A soit nilpotente. Nous savons en effet que :

$$e^{At} = \sum_{n_0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

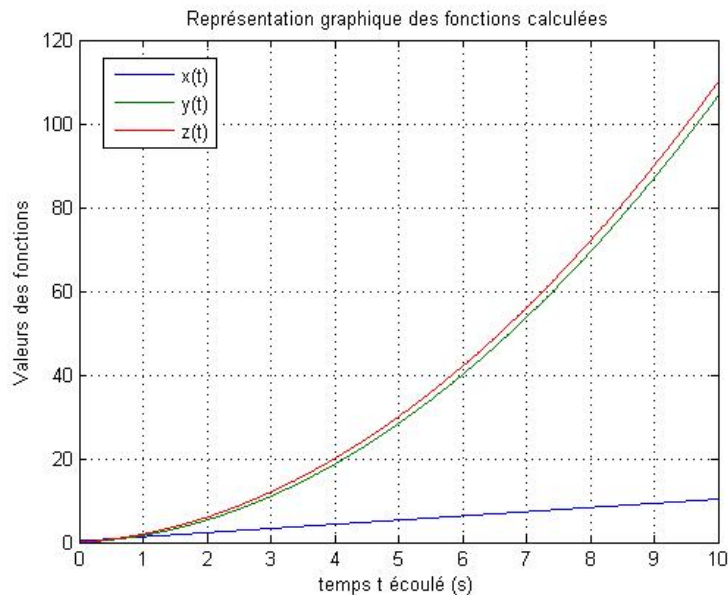
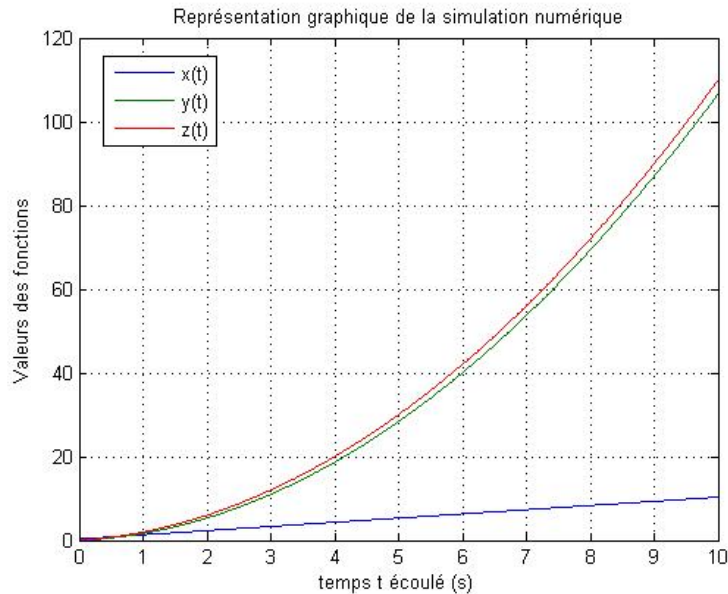
or comme $A^n = 0 \forall n \geq 3$, on a :

$$e^{At} = \sum_{n_0}^2 \frac{(At)^n}{n!} = I_3 + At + \frac{(At)^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 + 3t & 9t & -9t \\ 3t^2 + 2t & 9t^2 + 1 & -9t^2 \\ 3t^2 + 3t & 9t^2 + 3t & 1 - 3t - 9t^2 \end{pmatrix}$$

Si nous prenons comme conditions initiales $x(0) = 1/3$ et $y(0) = z(0) = 0$, grâce à la relation $\vec{S}(t) = \exp(At) \cdot \vec{S}(0)$ nous trouvons :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3} + t \\ y(t) = t^2 + \frac{2}{3}t \\ z(t) = t^2 + t \end{cases}$$

Afin de vérifier nos résultats, j'ai codé un algorithme sur fortran 77 permettant de résoudre numériquement (point par point) un système d'équations différentielles. Cette algorithme repose sur la méthode de Runge et Kutta. La représentation graphique du nuage de point fournit par l'algorithme coïncide parfaitement avec la représentation graphique des fonctions calculées plus haut.



3.2.3 Cas de valeurs propres complexes

Considérons un ressort horizontal de raideur k fixé à un mur et accroché à une masse m . Cette masse peut osciller sans frottements. D'après la deuxième loi de Newton, l'équation du mouvement est donnée par l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

La solution de cette équation est triviale : si on prend comme conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on a $x(t) = X_0 \cos(t\sqrt{k/m})$. Mais pour les besoins de cet exercice, oublions nos connaissances sur la résolution d'une équation différentielle d'ordre 2.

Nous savons que l'accélération, $\ddot{x}(t)$ est la dérivée de la vitesse, ainsi on a $\dot{v}(t) = -kx(t)/m$. Et par définition, on a $v(t) = \dot{x}(t)$. Ce qui nous donne un système différentiel 2×2 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -\frac{k}{m}x(t) \end{cases}$$

Soit vectoriellement, $\dot{\vec{S}}(t) = H\vec{S}(t)$, avec H la matrice générée par le système et $\vec{S}(t)$ le vecteur contenant les solutions du problème. Commençons par déterminer les valeurs propres de H :

$$\det(H - h \times 1_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{vmatrix} = h^2 + \frac{k}{m}$$

Cette quantité s'annule lorsque $h = \pm i\sqrt{k/m}$. On note h_+ la solution positive et h_- la solution négative. Nous pouvons déterminer le premier vecteur propre associé à la valeur propre h_- à l'aide de l'équation : $(H - h_-)|\psi_-\rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i\sqrt{k/m} & 1 \\ -k/m & i\sqrt{k/m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_- i\sqrt{\frac{k}{m}} + b_- = 0 \\ b_- i\sqrt{\frac{k}{m}} - a_- \frac{k}{m} = 0 \end{cases}$$

Ce système nous laisse un degré de liberté. On pose alors $a_- = 1$ par commodité, et on trouve directement :

$$|\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{k/m} \end{pmatrix}$$

De la même manière on arrive à déterminer le vecteur propre $|\psi_+\rangle$ associé à la valeur propre h_+ :

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{k/m} \end{pmatrix}$$

Tout cela nous permet donc de déterminer la matrice de passage et la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{k/m} & 0 \\ 0 & i\sqrt{k/m} \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{k/m} & i\sqrt{k/m} \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{2i\sqrt{k}} \begin{pmatrix} i\sqrt{k/m} & -1 \\ i\sqrt{k/m} & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la relation de passage, on trouve l'exponentielle de la matrice Ht :

$$\exp(Ht) = \frac{1}{2i\sqrt{k}} \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{k}{m}}(\exp[it\sqrt{k/m}] + \exp[-it\sqrt{k/m}]) & \exp[it\sqrt{k/m}] - \exp[-it\sqrt{k/m}] \\ \frac{k}{m}(\exp[-it\sqrt{k/m}] - \exp[it\sqrt{k/m}]) & i\sqrt{\frac{k}{m}}(\exp[it\sqrt{k/m}] + \exp[-it\sqrt{k/m}]) \end{pmatrix}$$

Ainsi, si nous prenons comme conditions initiales $x(0) = X_0$ et $v(0) = 0$ nous trouvons les solutions attendues :

$$\begin{cases} x(t) &= X_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \\ v(t) &= -X_0\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \end{cases}$$

3.2.4 Cas d'un second membre non nul

Prenons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= 2x(t) + 2t \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) + y(t) + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\vec{S}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{S}(t) + \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \end{pmatrix} = H\vec{S}(t) + \vec{F}(t)$$

avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

Cette équation différentielle est dite inhomogène à cause de la présence du terme $\vec{F}(t)$. Cependant, le début de la résolution est similaire à la procédure habituelle; en effet, dans un premier temps, on ne considère que l'équation homogène (en prenant $\vec{F}(t) = \vec{0}$).

Il est facile de vérifier que les valeurs propres de la matrice H sont $h_1 = 1$ et $h_2 = 2$. Les vecteur propres sont :

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est donc donnée par :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec toutes ces données nous calculons l'exponentielle de la matrice H , et nous trouvons :

$$e^{Ht} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2(e^{2t} - e^t) & e^t \end{pmatrix}$$

La solution homogène est donnée par la relation $\vec{S}_h(t) = \exp(Ht) \cdot \vec{S}(0)$. Pour trouver la solution particulière, nous allons nous appuyer sur le résultat de la premier section de ce cours (page 3) : il nous faut donc calculer la quantité suivante

$$\vec{S}_p(t) = \int_0^t e^{H(t-\tau)} \vec{F}(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 \\ 2(e^{2(t-\tau)} - e^{t-\tau}) & e^{t-\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\tau \\ 4\tau \end{pmatrix} d\tau$$

Après avoir calculé le produit matriciel, il ne reste plus qu'à calculer les intégrales suivantes :

$$\vec{S}_p(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 2\tau e^{2(t-\tau)} \\ 4\tau e^{2(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau$$

La première intégrale (première ligne) se calcule aisément à l'aide d'une intégration par parties; et la seconde est simplement le double de la première. On trouve ainsi,

$$\vec{S}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t} - 1}{2} - t \\ \frac{e^{2t} - 1}{2} - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

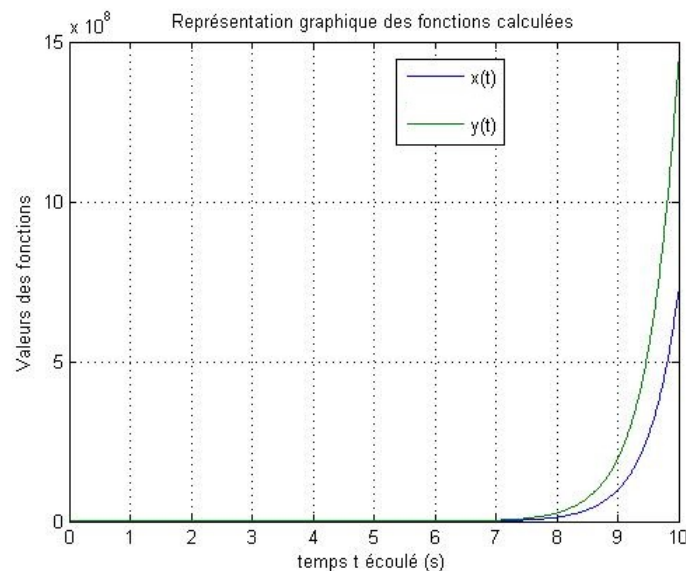
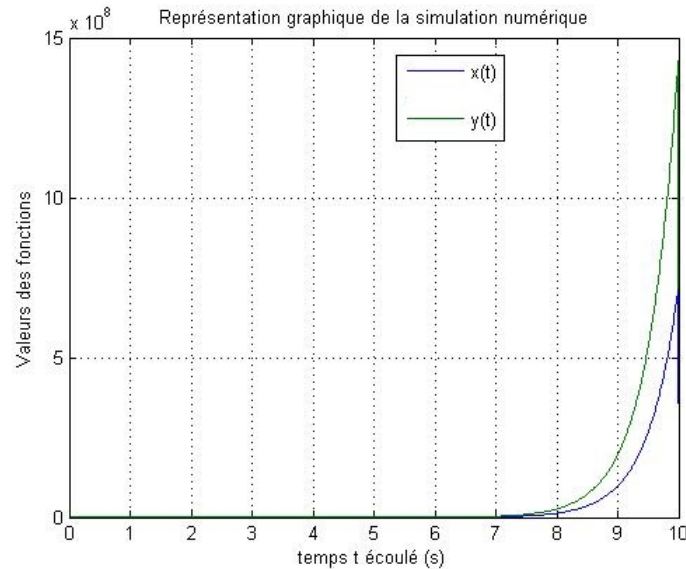
La solution du problème est donc donnée par la somme des deux solutions "partielles" :

$$\vec{S}(t) = \vec{S}_h(t) + \vec{S}_p(t) = \exp(Ht) \cdot \vec{S}(0) + \vec{S}_p(t)$$

Nous en tirons donc :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(3e^{2t} - 1) - t \\ y(t) = 3e^{2t} - e^t - 2t - 1 \end{cases}$$

J'ai encore une fois utilisé un algorithme permettant de vérifier si "la théorie et l'expérience" coïncident. Le résultat est positif comme le montrent les courbes suivantes :



? Exercice 5 : Application directe à la résolution d'un système différentiel
 ~ Un excellent exercice serait de refaire tous les exemples traités plus haut sans l'aide du cours. Penser à vérifier la relation de passage $H = PDP^{-1}$ à chaque fois!

3.2.5 Cas d'une matrice 3×3

Nous allons cette fois traiter intégralement la décroissance radioactive à deux corps en considérant également le nombre d'atomes de l'espèce stable, $N_3(t)$. Cette section prendra la forme d'un exercice.

Exercice 6 : Valeurs propres d'une matrice 3×3

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\lambda_1 N_1(t) \\ \dot{N}_2(t) = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \\ \dot{N}_3(t) = 0 + \lambda_2 N_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\vec{N}(t)}{dt} = H\vec{N}(t)$$

1. Montrer que les valeurs propres de la matrice H sont $h_1 = -\lambda_1$, $h_2 = -\lambda_2$ et $h_3 = 0$.
2. Montrer que la matrice de passage est (à un coefficient multiplicateur près) :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'inverse de la matrice de passage est :

$$P^{-1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \\ 0 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \\ 0 & 2 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

4. Vérifier la relation de passage $H = PDP^{-1}$.
5. En utilisant comme conditions initiales $N_1(0) = N_0$, $N_2(0) = N_3(0) = 0$, montrer que l'on trouve le résultat suivant :

$$\begin{cases} N_1(t) = N_0 \exp[-\lambda_1 t] \\ N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp[-\lambda_1 t] - \exp[-\lambda_2 t]) \\ N_3(t) = N_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda_1 \exp[-\lambda_2 t] - \lambda_2 \exp[-\lambda_1 t]}{\lambda_2 - \lambda_1} \right\} \end{cases}$$

Questions subsidiaires :

- A l'aide du fichier texte contenant le code de la simulation du système avec second membre, modifier les conditions initiales, et les fonctions pour que le code résolve notre problème (pour des valeurs arbitraires de λ_2 et λ_1).
- Enregistrer le code avec l'extension `.for`, et suivez les instructions données sur le site.
- Double cliquez sur le fichier exécutable, cela va créer un fichier texte "Kutta" contenant tous les points. Tracer les courbes et comparez avec les résultats trouvés par le calcul.

Graphiquement pour $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ on obtient :

